انتشارات
دانشگاه
کردستان

همراه با آموزش R . حل مثال‌ها در R

روش‌های آماری چندمتغیره

آمار و احتمال کاربردی

قادر میرزاقادری

آمار و احتمال کاربردی

آمار و احتمال کاربردی

(همراه با آموزش R . حل مثال‌ها در R . روش‌های آماری چندمتغیره)

قادر میرزاقادری

عضو هیأت علمی دانشگاه کردستان

انتشارات دانشگاه کردستان

۱۴۰۳

سرشناسه: میرزاقادری، قادر، ۱۳۵۳ -
عنوان و نام پدیدآور: آمار و احتمال کاربردی (همراه با آموزش R ، حل مثال‌ها در R، روش‌های آماری چند متغییره)/ قادر میرزاقادری.
مشخصات نشر: سنندج : دانشگاه کردستان، ۱۴۰۳.
شابک: ۰-۳۵-۸۲۱۱-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی: فیپا
موضوع: آمار ریاضی -- راهنمای آموزشی (عالی)
Mathematical statistics--Study and teaching (Higher)
آمار ریاضی-Mathematical statistics
آمار ریاضی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
Mathematical statistics -- Examinations, questions, etc (Higher)
احتمالات -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
Probabilities -- Problems, exercises, etc. (Higher)
احتمالات -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
Probabilities -- Examinations, questions, etc. (Higher)
شناسه افزوده : دانشگاه کردستان. انتشارات
رده بندی دیویی : ۵۱۹/۵
شماره کتابشناسی ملی : ۹۸۶۲۱۴۹
اطلاعات رکورد کتابشناسی: فیپا

عنوان: **آمار و احتمال کاربردی (همراه با آموزش R . حل مثال‌ها در R . روش‌های آماری چندمتغیره)**

پدیدآورندگان: **قادر میرزاقادری**

ناشر: **انتشارات دانشگاه کردستان**

ویراستار: **شعیب محمودی**

صفحه آرا: **شعیب محمودی**

نوبت و سال چاپ: **اول، ۱۴۰۳**

قطع: **وزیری**

شمارگان: **۵۰۰ جلد**

دانشگاه کردستان
University of Kurdistan

انتشارات دانشگاه کردستان

پیشگفتار

در سال‌های اخیر کتاب‌های فراوانی در زمینه‌ی آمار و احتمال مقدماتی به رشته‌ی تحریر درآمده است که غالباً ساختار و محتوای مشابهی دارند. کتاب حاضر نگرشی کاربردی‌تر به آمار دارد، با این هدف که برای استفاده‌ی دانشجویان رشته‌های غیرآماری، به‌ویژه رشته‌های علوم تجربی مفید باشد. در این کتاب سعی بر آن است مطالب به روشی ساده و در عین حال علمی، در قالب ساختاری مرتب و در صورت نیاز با بهره‌گیری از نمودارهای مناسب، ارائه شود. همچنین روش حل اغلب مثال‌ها در R توضیح داده شده و کدهای مربوطه ارائه شده‌اند. فصل‌های اول تا دوازدهم به روش‌های آمار تک‌متغیره پرداخته است. این کتاب به صورت کامل در بستر لتکس ($\LaTeX$) به رشته‌ی تحریر درآمد. علاوه بر این از زبان برنامه‌نویسی R در حل مثال‌ها استفاده شده است. دو فصل آخر به روش‌های آماری چند متغیره و آموزش زبان برنامه‌نویسی R اختصاص داده شد. با توجه به نیاز مبرم دانش‌آموختگان رشته‌های غیرآماری به یادگیری روش‌های آماری کاربردی و استفاده از نرم افزارهای رایانه‌ای، علاوه بر بیان ساده و قابل فهم مفاهیم و روش‌ها، اغلب مثال‌ها با خروجی یکی از محبوب‌ترین نرم‌افزار آماری یعنی R همراه شده است. بر خود لازم می‌دانم از آقایان دکتر افشین فلاح و دکتر محمد مرادی برای ارائه‌ی نظرات ارزنده، تشکر و قدردانی کنم. از آنجا که هیچ اثری بدون کاستی نیست، اینجانب هر گونه نظر اصلاحی خوانندگان را با اشتیاق پذیرا هستم.

قادر میرزاقادری
۱۴۰۳/۷/۱

فهرست مطالب

فصل ۱

آمار توصیفی

خلاصه: علم آمار به عنوان مجموعه‌ای از روش‌های جمع‌آوری، پاک‌سازی و خلاصه‌سازی، تحلیل و نتیجه‌گیری قابل‌اعتماد از داده‌ها، تعریف می‌شود. پس از جمع‌آوری و پاک‌سازی داده‌ها، می‌توان کارهای آماری بر روی آن‌ها را به دو بخشِ کلیِ توصیف و استنباط تقسیم کرد. بخش اول شامل تلخیص داده‌های پاک‌سازی‌شده در قالب جداول فراوانی، نمایش آن‌ها در نمودارها و محاسبه ویژگی‌هایی از داده‌ها مانند مرکزیت، پراکندگی، تقارن و عدم تقارن است که به آن آمار توصیفی می‌گویند. در واقع هدف آمار توصیفی، نمایش و توصیف داده‌ها به‌صورت راحت و قابل فهم است. به‌ویژه هنگامی که حجم داده‌ها زیاد باشد، بررسی صرفاً چشمی آن‌ها کاری دشوار خواهد بود. آمار فقط به توصیف داده‌ها ختم نمی‌شود، بلکه اغلب اوقات محقق نمونه‌ای از یک جامعه گرفته و با توجه به اطلاعات موجود در نمونه، می‌خواهد در مورد جامعه اظهارنظر کند. تعمیم نتایج حاصل از نمونه به جامعه را با استفاده از روش‌های آماری، آمار استنباطی می‌نامند.

۱-۱ جامعه‌ی آماری

جامعه‌ی آماری در آمار، مجموعه‌ی عناصری است که دست‌کم یک صفت مشترک دارند. جوامع آماری به دو نوع متناهی و نامتناهی تقسیم می‌شوند. جامعه‌ی متناهی به جامعه‌ای گفته می‌شود که تعداد عناصر آن محدود است و جامعه‌ی نامتناهی، جامعه‌ای است که تعداد عناصر آن بی‌نهایت باشد. در عمل گاهی اوقات که تعداد افراد جامعه بسیار بزرگ باشد، جامعه را نامتناهی در نظر می‌گیرند، مثل ماهی‌های یک دریا یا باکتری‌های موجود در یک مترمربع از زمین زراعی.

مجموعه‌ی افراد یک شهر یا مجموعه‌ی ارقام زراعی گندم در ایران، مثال‌هایی از جامعه‌ی متناهی و جامعه‌ی

تعداد پرتاب‌های لازم یک سکه برای مشاهده‌ی اولین شیر ({یک پرتاب، دو پرتاب، ...}) نامتناهی است.

اگر تعداد اعضای جامعه، اندک باشد می‌توان نسبت به بررسی همه‌ی افراد آن اقدام کرد. بررسی آماری همه‌ی واحدهای جامعه را سرشماری گویند. به‌عنوان مثال در جامعه‌ی دانشجویان یک کلاس، می‌توان نمرات همه‌ی دانشجویان را در یک درس خاص ثبت کرد و میانگین آن‌ها را به دست آورد. گاهی در آمار با جوامع چنان بزرگی روبه‌رو هستیم که بررسی همه‌ی اعضای آن غیرممکن، یا از لحاظ زمان و هزینه‌ی سرشماری مقرون به صرفه نیست. برای مثال یک مزرعه‌ی بزرگ گندم را در نظر بگیرید. برای تعیین میانگین تعداد دانه در هر خوشه‌ی این مزرعه، نمی‌توان تعداد دانه‌ها را در همه‌ی خوشه‌ها شمارش کرد و میانگین کل را به دست آورد. روش منطقی، انتخاب نمونه‌ای تصادفی از خوشه‌های گندم در این مزرعه و محاسبه‌ی میانگین تعداد دانه در خوشه‌های منتخب است.

۱-۲ نمونه

هر زیرمجموعه‌ای از واحدهای جامعه را نمونه گویند. نمونه ممکن است به صورت تصادفی انتخاب شود که اصطلاحاً به آن نمونه‌ی احتمالی می‌گویند. در مقابل، نمونه‌ی غیراحتمالی وجود دارد که براساس سلیقه‌ی افراد انتخاب می‌شود. در آمار نمونه‌ی احتمالی به دو دلیل بر نمونه‌ی غیراحتمالی ترجیح داده می‌شود. اول اینکه قوانین احتمال در مورد آن صادق است و استنباط آماری نیز براساس همین قوانین ساخته می‌شود، دوم اینکه نمونه‌های غیراحتمالی به دلیل سلیقه‌ای بودن، همواره در معرض این اتهام هستند که بیانگر کل جامعه نمی‌باشند. به‌عنوان مثال نمونه‌ای از محصول که توسط کشاورز برای فروش به خریدار عرضه می‌شود، ممکن است از طرف خریدار مورد شک گلچین بودن واقع شود. شعار نمونه‌گیری این است که مشت باید نمونه‌ی خروار باشد و این شعار در مورد نمونه‌های احتمالی صادق است. ساده‌ترین نمونه‌ی احتمالی نمونه‌ی تصادفی ساده (یا به‌طور خلاصه نمونه‌ی تصادفی است که در آن هر فرد جامعه، شانس مساوی برای انتخاب شدن در نمونه را دارد. یک نمونه‌ی تصادفی را از راه قرعه‌کشی، جدول اعداد تصادفی یا به کمک نرم‌افزارهای آماری می‌توان به دست آورد. نمونه‌ای می‌تواند مشخصات جامعه را با دقت برآورد کند که حجم بهینه‌ای داشته باشد و نمونه‌های خیلی کوچک، برآوردهای دقیقی از جامعه به دست نخواهند داد.

۱-۳ متغیر و داده

متغیر، مشخصه یا صفتی است که از عنصری به عنصر دیگر تغییر می‌کند. مانند نژاد، رتبه‌ی کنکور، دمای بدن و وزن افراد. متغیرها را می‌توان به چهار نوع اسمی، رتبه‌ای، فاصله‌ای و نسبی یا با تقسیم‌بندی کلی‌تری به کیفی و کمی تقسیم‌بندی نمود.

داده یا مشاهده، اطلاعاتی است که از اندازه‌گیری یا تعیین مقدار متغیر مربوط به عناصر مورد مطالعه حاصل می‌شود مانند اندازه‌ی قد هر فرد، میزان محصول یک درخت یا رنگ گل‌های رز در یک باغچه.

۱-۴ مقیاس‌های استیونز

استیونز در سال ۱۹۵۱ چهار نوع مقیاس معرفی نمود که می‌توان همه‌ی متغیرهای ممکن را با این مقیاس‌ها اندازه‌گیری کرد.

۱-۴-۱ مقیاس اسمی

مقیاس اسمی تنها برای شناسایی عناصر به کار می‌رود. مثلاً ممکن است کارگران کارخانه‌ای که متولد شهرهای تهران، تبریز، شیراز و اصفهان هستند با اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ مشخص شوند. این اعداد ارزش مقایسه نداشته و صرفاً بیانگر اسم شهرها هستند. لذا نمی‌توان روی آن‌ها اعمال ریاضی مانند جمع، تفریق و تقسیم انجام است.

۱-۴-۲ مقیاس ترتیبی

اعداد تشکیل‌دهنده‌ی مقیاس ترتیبی صرفاً برتری را نشان می‌دهند. مثلاً اگر مدیر یک کارخانه کارگران را ازنظر مهارت با اعداد ۱ ، ۲ ، ۳، و ۴ مشخص کند، کارگر ۴ از کارگر ۲ ماهرتر است ولی نمی‌توان گفت که دو برابر او مهارت دارد. این‌گونه اعداد را می‌توان تنها برای مقایسه به کار برد و نمی‌توان با آن‌ها چهار عمل اصلی ریاضی را انجام داد.

۱-۴-۳ مقیاس فاصله‌ای

اگر اعداد تشکیل‌دهنده‌ی مقیاس فاصله‌ای، نسبت دو تفاضل (یا دو فاصله) را حفظ کند، آن را مقیاس فاصله‌ای گویند. مثلاً اگر دمای چهار جسم در مقیاس سانتی‌گراد (x) به‌صورت

$$x_۱ = ۱۰, \qquad x_۲ = ۱۵, \qquad x_۳ = ۲۰, \qquad x_۴ = ۴۵, \qquad \frac{x_۴ - x_۳}{x_۲ - x_۱} = ۵$$

باشد، همین دماها در مقیاس فارنهایت (y) طبق رابطه‌ی $y = \frac{۹x}{۵} + ۳۲$ برابر

$$y_۱ = ۵۰, \qquad y_۲ = ۵۹, \qquad y_۳ = ۶۸, \qquad y_۴ = ۱۱۳, \qquad \frac{y_۴ - y_۳}{y_۲ - y_۱} = ۵$$

هستند. اگر درجه حرارت در مقیاس سانتی‌گراد صفر باشد در مقیاس فارنهایت درجه حرارت ۳۲ است. در مقیاس فاصله‌ای صفر معنی هیچ نداده و صرفاً قراردادی است. در مقیاس سانتی‌گراد $x_۳$ دو برابر $x_۱$ است ولی در مقیاس فارنهایت چنین نیست. بنابراین در مقیاس فاصله‌ای نسبت اعداد محفوظ نمی‌ماند پس نمی‌توان گفت که جسم ۳ دو برابر گرم‌تر از جسم ۱ است.

۱-۴-۴ مقیاس نسبی

مقیاس نسبی کامل‌ترین نوع مقیاس است و برای بیشتر متغیرهای قابل شمارش یا اندازه‌گیری مانند تعداد، وزن، طول، سطح و غیره به کار می‌رود. مثلاً اگر وزن دو جسم ۶۰۰۰ و ۲۰۰۰ کیلوگرم باشد، وزن آن‌ها در مقیاس تُن به ترتیب ۶ و ۲ است. با اعداد حاصل از این نوع مقیاس می‌توان چهار عمل اصلی را انجام داد. صفر در این نوع مقیاس واقعی است.

تعریف ۱-۱. متغیر کیفی
اگر متغیر با عدد قابل‌بیان نباشد، به آن متغیر کیفی گویند، مانند متغیرهایی که با مقیاس‌های اسمی یا رتبه‌ای بیان می‌شوند. وجود یا عدم وجود کُرک بر روی برگ، رنگ گلبرگ و مقاومت گیاه گندم به بیماری زنگ، مثال‌هایی از متغیرهای کیفی هستند.

تعریف ۱-۲. متغیر کمی
به متغیری که قابل اندازه‌گیری یا شمارش است متغیر کمی گویند، مانند متغیرهایی که با مقیاس‌های فاصله‌ای یا نسبی بیان می‌شوند. متغیرهای کمی خود به دو نوع پیوسته و گسسته تقسیم می‌شوند. بسیاری از متغیرهای فیزیکی قابل اندازه‌گیری، پیوسته هستند و می‌توانند هر مقدار ممکن در دامنه‌ی تغییرات (فاصله‌ی بین بیشترین و کمترین مقدار) موجود را به خود اختصاص دهند. متغیرهایی چون وزن دانه، ارتفاع گیاه، درصد روغن بذر، درصد چربی شیر و میزان تولید شیر در دام‌ها، پیوسته هستند. متغیر گسسته متغیری است که مجموعه مقادیر ممکن آن شمارا باشد. مانند تعداد گلبرگ‌های یک گل، تعداد دانه‌ها در یک سنبله و تعداد لاروهای موجود بر روی یک گیاه.

۱-۵ پارامتر

پارامتر کمیتی است که یک ویژگی جامعه را نشان می‌دهد. پارامتر جامعه کمیتی است ثابت ولی ناشناخته و عمدتاً از طریق نمونه‌گیری برآورد می‌شود. البته می‌توان مقدار دقیق آن را از طریق سرشماری به دست آورد. پارامتر با حروف کوچک یونانی بیان می‌شود. مثلاً میانگین جامعه را با μ، میانه را با η و انحراف معیار جامعه را با σ نشان می‌دهند.

۱-۶ آماره

هر آماره تابعی است که براساس مشاهدات حاصل از نمونه‌ی تصادفی محاسبه می‌شود و ویژگی خاصی از نمونه را نشان می‌دهد. مقدار هر آماره به دلیل وابستگی آن به مشاهدات نمونه، از نمونه‌ای به نمونه‌ی دیگر متغیر است و ازاین‌رو تصادفی است. آماره‌ها با حروف انگلیسی نشان داده می‌شوند.

۱-۷ جدول‌ها و نمودارهای فراوانی

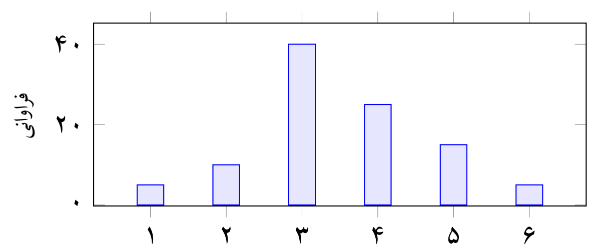
داده‌های جمع‌آوری‌شده در اولین مرحله، به صورت توده‌ای از اعداد خام هستند و قابلیت تعبیر و تفسیر جامعه را ندارند. پس ابتدا باید در یک جدول خلاصه شده و یا در نمودار مناسبی ترسیم می‌شوند تا قابلیت توصیف جامعه را پیدا کنند. برای رسم جدول فراوانی مربوط به داده‌های کیفی یا گسسته، مقادیر مختلف متغیر در یک ستون نوشته شده و مواردی مثل فراوانی (فراوانی مطلق)، فراوانی نسبی و فراوانی تجمعی در ستون‌های دیگری قید می‌شود. فراوانی، تعداد دفعات تکرار هر داده بوده و با f_i نشان داده می‌شود که در آن i شماره‌ی داده یا شماره‌ی دسته است. فراوانی نسبی که با p_i نشان داده می‌شود برابر است با فراوانی هر داده یا دسته تقسیم بر تعداد کل (N). فراوانی تجمعی نیز با Fc_i نشان داده می‌شود و برابر است با فراوانی هر دسته به اضافه‌ی فراوانی‌های طبقات قبل از آن.

مثال ۱-۱. تعداد خانواده‌های دارای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ فرزند در یک روستا، به ترتیب برابر با ۵، ۱۰، ۴۰، ۲۵، ۱۵ و ۵ بوده است. جدول فراوانی تعداد فرزندان می‌تواند به صورت زیر باشد.

جدول ۱-۱: تعداد فرزندان در خانواده‌های یک روستا.

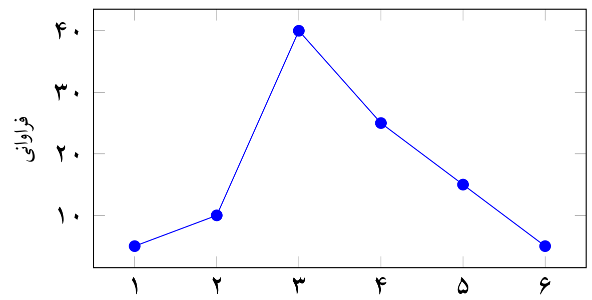
تعداد فرزندان خانواده	فراوانی (f_i)	فراوانی نسبی (p_i)	فراوانی تجمعی (Fc_i)
۱	۵	۰/۰۵	۵
۲	۱۰	۰/۱۰	۱۵
۳	۴۰	۰/۴۰	۵۵
۴	۲۵	۰/۲۵	۸۰
۵	۱۵	۰/۱۵	۹۵
۶	۵	۰/۰۵	۱۰۰

علاوه بر جدول فراوانی، برای توصیف بهتر داده‌ها، می‌توان از نمودارهای فراوانی نیز استفاده کرد. در این نمودارها معمولاً مقادیر مشاهده‌شده‌ی متغیر بر روی محور افقی و فراوانی (فراوانی نسبی یا فراوانی نسبی تجمعی) مشاهدات نیز بر روی محور عمودی، مشخص می‌شود (نمودار ۱-۱، نمودار ۱-۲، نمودار ۱-۳ و نمودار ۱-۴).

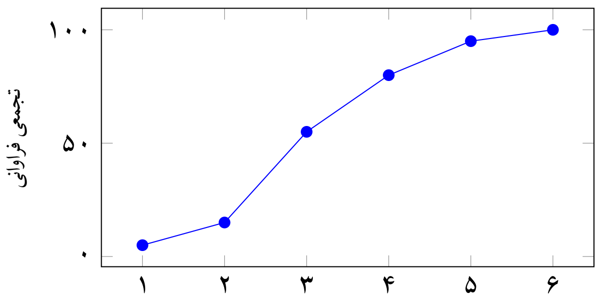


شکل ۱-۱: نمودار ستونی تعداد فرزندان در خانواده‌های یک روستا مربوط به داده‌های جدول ۱-۱.

هرگاه فراوانی هر مقدار متغیر با یک نقطه مشخص و سپس نقاط به هم وصل شوند، نمودار چندضلعی حاصل می‌شود.

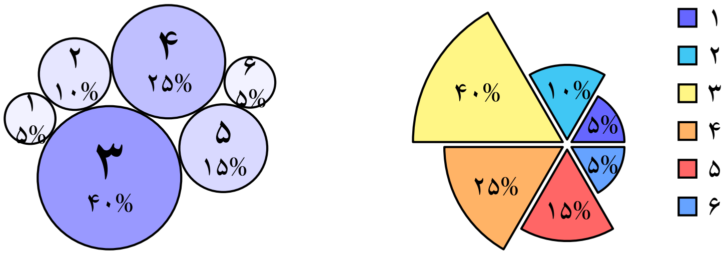


شکل ۱-۲: نمودار فراوانی چندضلعی مربوط به داده‌های جدول ۱-۱.



شکل ۱-۳: نمودار فراوانی چندضلعی تجمعی مربوط به داده‌های جدول ۱-۱.

نمودار دایره‌ای (یا کلوچه‌ای) را نیز می‌توان برای داده‌های جدول ۱-۱ رسم نمود. در این نمودار دایره، متناسب با فراوانی مقادیر متمایزِ متغیر تقسیم‌بندی می‌شود.



شکل ۱-۴: دو نوع نمودار دایره‌ای مربوط به داده‌های جدول ۱-۱ که در آن اعداد هر قسمت، تعداد فرزندان و مساحت هر قسمت برابر با فراوانی خانواده‌های دارای آن تعداد فرزند است.

به وسیله‌ی نمودارهای فراوانی می‌توان بسیاری از ویژگی‌های مشاهدات را به راحتی بیان نمود. مثلاً دامنه‌ی تغییرات برابر با ($x_{max} - x_{min} = ۲۰ - ۲ = ۱۸$) و بیشترین فراوانی مربوط به خانواده‌های سه فرزندی است. با استفاده از نمودار چندضلعی نسبی تجمعی به‌آسانی می‌توان عنصری را که ۲۰٪ عناصر مقداری کمتر از آن دارند را پیدا کرد.

در حالتی که متغیر پیوسته یا گسسته دارای تعداد مقادیر متمایز زیادی باشد، معمولاً داده‌ها به چند دسته با فاصله مساوی تقسیم شده و فراوانی برای دسته‌ها مشخص می‌شود. در ستون اول جدول، حدود دسته‌ها نوشته می‌شود. یک ستون جداگانه نیز به نام نشان دسته اضافه می‌شود که مقدار آن برابر نقطه‌ی وسط هر دسته است.

مثال ۱-۲. برای مثال فرض کنید ارتفاع ۲۰ بوته از یک گونه‌ی گیاهی به صورت زیر بوده باشد:

جدول ۱-۲: ارتفاع ۲۰ بوته از یک گونه گیاهی بر حسب سانتی‌متر.

۲۳/۵	۱۹/۶	۱۸/۴	۱۸/۲	۲۲/۵	۱۳/۳	۲۳/۵	۲۰/۵	۲۳/۲	۱۹/۵
۲۷/۲	۲۲/۵	۲۲/۹	۲۱/۸	۲۰/۴	۱۷/۵	۲۴/۳	۲۲/۲	۱۵/۵	۱۶/۷

برای بررسی راحت‌تر، بهتر است این داده‌ها که مثالی از مقادیر یک متغیر پیوسته هستند، به چند دسته با فاصله‌ی مساوی تقسیم شده و فراوانی یا فراوانی نسبی داده‌ها در هر دسته مشخص شود. معمولاً بسته به تعداد کل داده‌ها،تعداد دسته‌ها را از ۶ تا ۲۵ در نظر می‌گیرند. برای مثال داده‌های جدول ۱-۲ در نمودار ۱-۳ به ۷ دسته‌ی مجزا تقسیم شده و فراوانی و فراوانی نسبی افراد در هر دسته به دست آمده است. در این جدول دامنه‌ی هر دسته برابر با ۲ در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده به ترتیب برابر با ۱۳/۳ و ۲۷/۲ می‌باشند، دامنه‌ی کلی تغییرات برابر با ۱۳/۹ است. اگر هدف دسته‌بندی داده‌ها به ۷ دسته‌ی برابر باشد، دامنه‌ی تغییرات به ۷ تقسیم می‌شود که برابر با ۱/۹۸ خواهد بود. چون انجام محاسبات با این رقم مشکل است، معمولاً آن را گرد کرده و برابر با ۲ در نظر می‌گیرند. با وجود ۷ دسته با فواصل مساوی ۲ ، دامنه‌ی کلی تغییرات از ۱۳/۹ به ۱۴ افزایش می‌یابد. لذا دسته‌ی اول از ۱۳/۲۵ شروع و دسته‌ی آخر تا ۲۷/۲۵ ادامه می‌یابد.

جدول ۱-۳: تقسیم‌بندی داده‌های جدول ۱-۲ در هفت دسته‌ی مجزا.

حدود دسته	فراوانی (f_i)	فراوانی نسبی (p_i)	نشان دسته
۱۳/۲۵ − ۱۵/۲۵	۱	۰/۰۵	۱۴/۲۵
۱۵/۲۵ − ۱۷/۲۵	۲	۰/۱۰	۱۶/۲۵
۱۷/۲۵ − ۱۹/۲۵	۳	۰/۱۵	۱۸/۲۵
۱۹/۲۵ − ۲۱/۲۵	۴	۰/۲۰	۲۰/۲۵
۲۱/۲۵ − ۲۳/۲۵	۶	۰/۳۰	۲۲/۲۵
۲۳/۲۵ − ۲۵/۲۵	۳	۰/۱۵	۲۴/۲۵
۲۵/۲۵ − ۲۷/۲۵	۱	۰/۰۵	۲۶/۲۵

```
stem(x, scale = 3, width = 200, atom = 1e-08)


  The decimal point is at the |

  13 | 3
  14 |
  15 | 5
  16 | 7
  17 | 5
  18 | 24
  19 | 56
  20 | 45
  21 | 8
  22 | 2559
  23 | 255
  24 | 3
  25 |
  26 |
  27 | 2
```

شکل ۱-۶: نمودار شاخه و برگ مربوط به داده‌های جدول ۱-۲ که در R ایجاد شده است.

۱-۷-۳ نمودار نقطه‌ای

نمودار نقطه‌ای مربوط به داده‌های جدول ۱-۲ در زیر نشان داده شده است. در این نمودار، هر داده به‌صورت نقطه‌ای در بالای خط افقی نشان داده می‌شود. اگر داده‌ای دو بار تکرار شده باشد، نقاط مربوطه روی یکدیگر قرار می‌گیرند.

کد ۱-۲: رسم نمودار نقطه‌ای در R.

```
library(UsingR)
a <- c(19.5,23.2, 20.5, 23.5, 13.3,22.5,18.2,18.4,19.6,
23.5,16.7,15.5,22.2,24.3,17.5,20.4,21.8,22.9,22.5,27.2)
par(mar = c(2, 1.5,0, 1))  # تنظیم حاشیه‌ها
DOTplot(a)
```

تعریف ۱-۳ (محاسبه‌ی میانه در جداول فراوانی)**.**

$$m = L_m + \frac{\left(\frac{n}{۲} - g\right)}{f_m} w$$

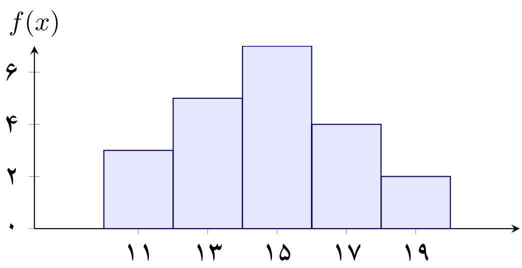
L_m، مرز پایین واقعی دسته‌ی میانه،
g، فراوانی تجمعی دسته‌ی قبل از دسته‌ی میانه،
f_m، فراوانی دسته‌ای که میانه در آن قرار دارد و،
w، فاصله‌ی دسته‌ها.

مثال ۱-۳. میانه را در جدول فراوانی زیر حساب کنید.

حدود دسته	فراوانی	فراوانی تجمعی صعودی
۱۰-۱۲	۳	۳
۱۲-۱۴	۵	۸
۱۴-۱۶	۷	۱۵
۱۶-۱۸	۴	۱۹
۱۸-۲۰	۲	۲۱

نقطه‌ی $n/۲ = ۱۰/۵$ به‌عنوان عضو مرکزی داده‌ها در نظر گرفته می‌شود. این عضو در دسته‌ی سوم قرار گرفته است. از آنجا که حد پایین دسته‌ی سوم ۱۴ است، میانه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$m = ۱۴ + \left(\frac{۱۰/۵ - ۸}{۷}\right) ۲ = ۱۴/۷۱.$$

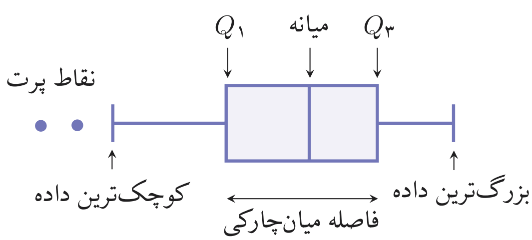


شکل ۱-۸: نمودار مستطیلی برای داده‌های مثال ۱-۳.

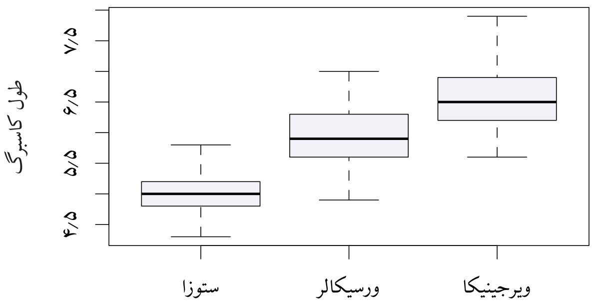
در مواردی که داده‌ها گسسته بوده و به صورت گسسته دسته‌بندی شده‌اند، برای محاسبه‌ی صحیح میانه،

```
# 73  44   4   2   3  78  15  38  59  70  80 ...

# استفاده از توابع چندک
quantile(x, na.rm = TRUE)
# 0%   25%   50%   75%  100%
# 0    23    50    75   100

# با استفاده از آرگومان probs می‌توان هر چندکی را محاسبه کرد.
# با استفاده از کد زیر می‌توان میانه را محاسبه کرد.
# میانه
quantile(x, probs = 0.5)
# 50%
# 50

quantile(x, probs = seq(0, 1, 1/3))
# 0% 33.33333% 66.66667% 100%
# 0  34         68          100

# محاسبه چندک‌ها
quantile(x, probs = seq(0, 1, 1/4))
# 0%   25%   50%   75%   100%
# 0    23    50    75    100

# رسم باکس‌پلات از داده‌های iris
boxplot(Sepal.Length ~ Species, outpch = NA,
        data=iris, col='lightyellow')
```

یکی از روش‌های نشان دادن پراکندگی داده‌ها، استفاده از نمودار جعبه‌ای است. این نمودار، چارک‌ها و کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده را نشان می‌دهد. نمودار جعبه‌ای در زیر برای مجموعه‌ای از داده‌ها نشان داده شده است و بیان می‌کند که چارک اول، میانه و چارک سوم در مجموعه‌ی داده‌ی مربوطه به ترتیب ۱۲/۵، ۱۷ و ۱۸/۵ است. همچنین نمودار نشان می‌دهد که کوچک‌ترین داده ۱۰ و بزرگ‌ترین داده ۲۴ است.



شکل ۱-۱۰: نمودار جعبه‌ای، کمترین داده، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین داده را به ترتیب از پایین به بالا نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱۱: نمودار جعبه‌ای متغیر طول کاسبرگ مربوط به ۵۰ بوته. از هر یک از سه گونه‌ی زنبق به نام‌های ویرجینیکا، ورسیکالر و ستوزا بر حسب سانتی‌متر. در سمت چپ گل زنبق نشان داده شده است. این سری داده با نام iris حاوی داده‌های صفات مختلف بوده و در بسیاری از مثال‌های آماری R مورد استفاده قرار گرفته است.

۱-۱۰ نما

نما یا مد داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد. برای مثال در داده‌های ۹، ۹، ۶، ۷، ۶، ۶، ۵، ۴، ۴، ۳، ۲ نما برابر با ۶ است. حال به محاسبه‌ی نما در جدول فراوانی زیر پرداخته می‌شود:

دسته	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴	۱۴-۱۶	۱۶-۱۸	۱۸-۲۰
فراوانی (f_i)	۳	۵	۷	۴	۲

جدول ۱-۴: جدول فراوانی

اگر بافت‌نگار توزیع فراوانی در این جدول رسم شود، با رسم دو خط از گوشه‌های بلندترین مستطیل به گوشه‌ی مستطیل‌های مجاور، می‌توان موقعیت مد را بر روی بافت‌نگار به صورت زیر مشخص کرد (شکل ۱-۱۰).

روش بالا یک روش ترسیمی است که موقعیت نما را بر روی بافت‌نگار نشان می‌دهد. برای محاسبه‌ی مقدار عددی نما به صورت زیر عمل می‌کنیم:

تعریف ۱-۴ (نحوه‌ی محاسبه‌ی نما در جدول فراوانی).

$$M = A + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) w$$

A، حد پایین دسته نما

d_1، فراوانی دسته‌ی نما منهای فراوانی دسته قبل از آن

d_2، فراوانی دسته‌ی نما منهای فراوانی دسته بعد از آن و

w، فاصله‌ی دسته‌ها.

در صورتی که N بزرگ باشد، گرفتن ریشه N ام از آن‌ها سخت است، در این موارد می‌توان لگاریتم داده‌ها را در مبنای ۱۰ به دست آورده و میانگین حسابی آن‌ها را محاسبه کرد. در این صورت، میانگین هندسی برابر با عدد ۱۰ به توان میانگین حسابی محاسبه‌شده خواهد بود.

$$\log g = \frac{1}{N}\left(\log x_1 \times \log x_2 \times \cdots \times \log x_N\right)$$
$$g = 10^{\frac{1}{N}(\log x_1 \times \log x_2 \times \cdots \times \log x_N)}$$

مثال ۱-۸. میانگین هندسی اعداد ۳، ۴ و ۵ را به دست آورید.

$$\begin{aligned}\log g &= \frac{1}{3}(\log 3 + \log 4 + \log 5)\\ &= \frac{1}{3}(0/477 + 0/602 + 0/699) = 0/592\\ g &= 10^{\log 0/592} = 10^{0/592} = 3/91\end{aligned}$$

مثال ۱-۹. قیمت کالای A در تیرماه دو برابر و در مردادماه سه برابر کالای B بوده است. میانگین نسبت کالای A به B را در این دو ماه را محاسبه کنید.

$$g = \sqrt{2 \times 3} = 2/45$$

واضح است که میانگین نسبت کالای B به A در این دو ماه برابر خواهد بود با:

$$g = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

مثال ۱-۱۰. عملکرد رقم باران در سال زراعی ۱۳۹۹-۱۴۰۰، ۱/۵ برابر و در سال زراعی ۱۴۰۰-۱۴۰۱ دو برابر رقم سرداری بوده است. میانگین عملکرد رقم سرداری در این دو سال نسبت به باران چقدر بوده است؟

$$g = \sqrt{\frac{1}{1/5} \times \frac{1}{2}} = 0/58$$

مثال ۱-۱۱. میزان خسارت ناشی از یک آفت در ۴ بوته‌ی مختلف ۲۵، ۳۰، ۲۴ و ۴۰ درصد بوده است. متوسط خسارت برحسب درصد چقدر است؟

$$g = \sqrt[4]{25 \times 30 \times 24 \times 40} = 29/13$$

بنابراین از میانگین همساز برای محاسبه‌ی مقدار متوسط استفاده می‌شود.

$$h = \frac{۴}{\frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۸} + \frac{۱}{۲۱} + \frac{۱}{۳۵}} = ۲۰/۵۹$$

در حالت کلی برای یک گروه از اعداد مثبت رابطه‌ی $h \leq g \leq \mu$ برقرار است. البته درصورتی‌که اعداد باهم برابر باشند، هر سه نوع میانگین، برابر خواهند بود.

۱-۱۱-۶ مقایسه‌ی میانگین، میانه و نما

میانگین حسابی در واقع، نقطه‌ی ثقل داده‌ها است و متداول‌ترین شاخص مرکزی است. میانگین حسابی دارای خواص احتمالی خوبی است بدین معنی که می‌توان میانگین جامعه را با اطمینان بالایی به کمک میانگین نمونه برآورد کرد. اگر از جامعه‌ای که دنباله‌های توزیع آن، خیلی به سمت چپ یا راست کشیده نیست، نمونه‌های مختلف انتخاب شوند، میانگین حسابی نمونه‌ها به میانگین جامعه نزدیک‌تر خواهند بود تا میانه‌ی آن‌ها. میانه به اندازه‌ی میانگین تحت تأثیر داده‌های پرت قرار نمی‌گیرد و این موضوع به‌ویژه در مورد توزیع‌هایی که دنباله‌های کشیده دارند، اهمیت زیادی دارد. میانگین برای متغیرهای ترتیبی و اسمی کارایی ندارد. برای توصیف متغیرهای ترتیبی، میانه و نما؛ و برای توصیف متغیرهای اسمی، تنها نما کاربرد دارد. برای توصیف مرکزیت داده‌های کمی، میانگین و میانه از اهمیت بیشتری برخوردارند. یک مجموعه‌ی داده ممکن است نما نداشته باشد یا بیش از یک نما داشته باشد. در توزیع‌های متقارن میانگین، میانه و نما باهم برابرند، ولی در توزیع‌های چوله (نامتقارن) چنین نیست. در مثال‌های زیر رابطه‌ی شاخص‌های مرکزی بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرند.

کد ۱-۴: محاسبه‌ی انواع میانگین‌های حسابی ساده، موزون، هندسی و هارمونیک در نرم‌افزار R.

```
# با استفاده از تابع mean می‌توان میانگین ساده را محاسبه کرد.
# محاسبه‌ی میانگین موزون
x1 <- c(9, 5, 2, 7, 3, 6, 4, 5)          # ایجاد بردار داده‌ها
w1 <- c(2, 3, 1, 5, 7, 1, 3, 7)          # ایجاد بردار وزن‌ها
weighted.mean(x1, w1)                    # محاسبه‌ی میانگین موزون
# 4.965517

# محاسبه‌ی میانگین هندسی
x <- c(8, 9, 4, 1, 6, 4, 6, 2, 5)        # ایجاد بردار داده‌ها
exp(mean(log(x)))                        # محاسبه‌ی میانگین هندسی
# 4.209156

# با استفاده از تابع geometric.mean از بسته psych
install.packages("psych")                # نصب بسته psych
```

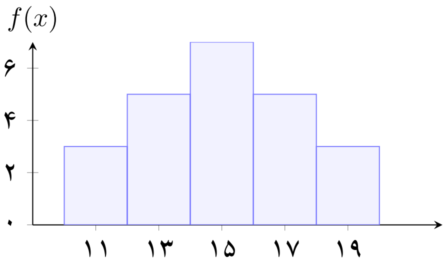
```
library("psych")                         # psych فراخوانی بسته
geometric.mean(x)                        # محاسبه‌ی میانگین هندسی با تابع مربوطه
# 4.209156

# psych محاسبه‌ی میانگین همساز با استفاده از بسته
x <- c(8, 9, 4, 1, 6, 4, 6, 2, 5)       # ایجاد بردار داده‌ها
harmonic.mean(x)                         # محاسبه‌ی میانگین همساز
# 23.68814
```

۱-۱۲ چولگی (عدم قرینگی)

داده‌های جدول ۱-۶ را در نظر بگیرید. نمودار ۱-۱۲ که مربوط به داده‌های این جدول است، نشان می‌دهد که شکل توزیع داده‌ها متقارن و تا حدودی زنگوله‌ای شکل است. همان‌گونه که مقادیر شاخص‌های مرکزی نشان می‌دهد، در چنین توزیع‌های متقارنی، میانگین، میانه و نما باهم برابر هستند.

جدول ۱-۶: داده‌های دسته‌بندی‌شده و فراوانی آن‌ها.

حدود دسته	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴	۱۴-۱۶	۱۶-۱۸	۱۸-۲۰
فراوانی (f_i)	۳	۵	۷	۵	۳



شکل ۱-۱۳: نمودار داده‌های جدول ۱-۶ که نشان‌دهنده‌ی متقارن بودن شکل توزیع است.

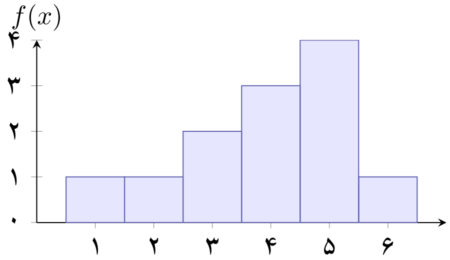
میانگین، میانه و نما برای این توزیع متقارن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mu = \frac{۱۱(۳) + ۱۳(۵) + ۱۵(۷) + ۱۷(۵) + ۱۹(۳)}{۲۳} = ۱۵$$

$$m = ۱۴ + \left(\frac{۱۱/۵ - ۸}{۷}\right) ۲ = ۱۵$$

$$M = ۱۴ + \left(\frac{۲}{۲ + ۲}\right) ۲ = ۱۵.$$

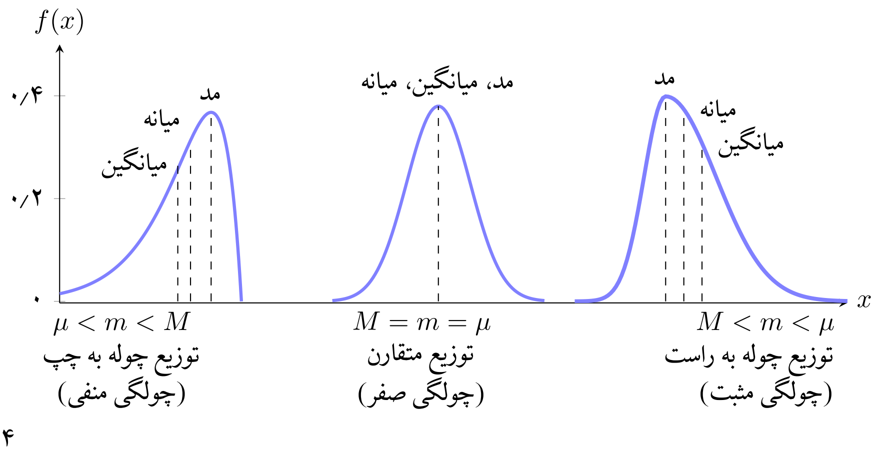
مثال ۱-۱۴. تعداد تصادفات رانندگی در ۱۲ شهر در طول یک ماه ۳، ۴، ۵، ۲، ۳، ۵، ۴، ۵، ۱، ۴، ۶، ۵ بوده است. نمودار میله‌ای داده‌ها را رسم کرده و میانگین، میانه و نما را برای داده‌ها به دست آورید. چه ارتباطی بین میانگین، میانه و نما، با شکل توزیع وجود دارد؟



شکل ۱-۱۴: نمودار توزیع فراوانی داده‌های مثال ۱-۱۴ که نشان‌دهنده‌ی چولگی (عدم تقارن) توزیع به سمت چپ است.

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۴۷}{۱۲} = ۳/۹۱$$
$$m = ۳/۵ + (\frac{۶ - ۴}{۳})۱ = ۴/۱۶$$
$$M = ۴/۵ + (\frac{۱}{۱ + ۳})۱ = ۴/۷۵$$

ملاحظه می‌شود در مورد یک توزیع چوله به چپ، میانگین کوچک‌تر از میانه و نما بوده و نما بزرگ‌ترین است. به طور کلی همان‌گونه که در نمودار زیر مشاهده می‌شود، در توزیع‌های دارای چولگی منفی رابطه $\mu < m < M$ وجود دارد. این رابطه در توزیع‌های دارای چولگی مثبت، به‌صورت $M < m < \mu$ است.



اگر n داده $x_۱, x_۲, x_۳, \ldots, x_i, \cdots, x_n$ با فراوانی‌های $f_۱, f_۲, f_۳ \cdots, f_i, \ldots, f_n$ موجود باشد، میانگین توان rام $x_i - \mu$ را گشتاور مرتبه‌ی rام پیرامون μ نامیده و صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\mu_r = \frac{\sum(x_i - \mu)^r}{N}$$

واضح است که گشتاور مرتبه‌ی دوم پیرامون μ همان واریانس جامعه است $(\mu_۲ = \sigma^۲)$. پارامتر $\frac{\mu_۳}{\sigma^۳}$ که ضریب چولگی گشتاوری نام دارد، برابر با

$$SK = \frac{\mu_۳}{\sigma^۳} = \frac{\frac{\sum(x_i-\mu)^۳}{N}}{\left(\sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^۲}{N}}\right)^۳}$$

بوده و به‌عنوان مهم‌ترین شاخص چولگی (عدم تقارن) مورد استفاده قرار می‌گیرد. از دیگر پارامترهایی که به‌عنوان شاخص چولگی به کار می‌روند می‌توان به ضریب چولگی اول پیرسون، $(\mu - m)/\sigma$، و ضریب چولگی دوم پیرسون $\sigma/[(\mu - m)۳]$ اشاره کرد که در آن M و m به ترتیب مد و میانه هستند. در صورتی که داده‌ها نسبت به میانگین متقارن باشند، همه‌ی ضرایب چولگی برابر صفر خواهند بود. گرچه روابط مختلفی برای محاسبه‌ی مقدار چولگی وجود دارد ولی در نرم‌افزارهای آماری ازجمله Minitab، SAS و R برای برآورد چولگی از ضریب چولگی گشتاوری، $\frac{\mu_۳}{\sigma^۳}$ استفاده شده و مقدار آن از رابطه زیر با استفاده نمونه برآورد می‌شود:

$$SK = \frac{n}{(n-۱)(n-۲)}\sum(\frac{x_i - \bar{x}}{s})^۳$$

۱-۱۳ برجستگی

میزان برجستگی یا تیزی منحنی در نقطه‌ی ماکزیمم منحنی فراوانی را نسبت به منحنی نرمال استاندارد، برجستگی می‌نامند. فرض کنید $\mu_۴$ گشتاور مرکزی چهارم و σ انحراف استاندارد باشد. در این صورت معیار برجستگی از رابطه‌ی $K = \frac{\mu_۴}{\sigma^۴} - ۳$ محاسبه می‌شود. مقدار K برای منحنی نرمال نزدیک صفر است. برحسب آنکه K مثبت یا منفی باشد منحنی فراوانی نسبت به منحنی نرمال استاندارد مرتفع‌تر یا مسطح‌تر است. همان‌گونه که در مورد چولگی گفته شد، رابطه‌ای که برای برآورد ضریب کشیدگی در اغلب نرم‌افزارهای آماری از جمله Minitab، SAS و R برای برآورد برجستگی در نمونه، مورد استفاده قرار می‌گیرد، مقداری با رابطه‌ی $\frac{\mu_۴}{\sigma^۴} - ۳$ متفاوت است. برای مثال در مورد توزیع نرمال که از معروف‌ترین توزیع‌های متقارن است، مقدار چولگی برابر با صفر و مقدار برجستگی برابر با ۳ است. برای محاسبه‌ی این مقادیر در نرم‌افزار R می‌توان از بسته‌ی e1071

محاسبه‌ی واریانس با استفاده از جدول فراوانی

اگر در جدول فراوانی، میان دسته‌ها $x_۱, x_۲, \ldots, x_N$ و فراوانی متناظر با آن‌ها $f_۱, f_۲, \ldots, f_N$ باشد، واریانس به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\sigma_x^۲ = \frac{\sum (x_i - \mu)^۲ f_i}{N} = \frac{\sum {x_i}^۲ f_i - \frac{(\sum x_i f_i)^۲}{N}}{N}$$

مثال ۱-۱۵. در جدول زیر طول بلال در ۲۰ بوته‌ی ذرت بر حسب سانتیمتر داده شده است. میانگین و واریانس را با استفاده از داده‌های اصلی و جدول فراوانی به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

۲۳/۵	۱۹/۶	۱۸/۴	۱۸/۲	۲۲/۵	۱۳/۳	۲۳/۵	۲۰/۵	۲۳/۲	۱۹/۵
۲۷/۲	۲۲/۵	۲۲/۹	۲۱/۸	۲۰/۴	۱۷/۵	۲۴/۳	۲۲/۲	۱۵/۵	۱۶/۷

جدول ۱-۷: تقسیم داده‌های جدول بالا در هفت دسته‌ی مجزا.

فاصله‌ی دسته	فراوانی (f_i)	نسبت یا فراوانی نسبی (p_i)	نشان دسته
۱۳/۲۵ − ۱۵/۲۵	۱	۰/۰۵	۱۴/۲۵
۱۵/۲۵ − ۱۷/۲۵	۲	۰/۱۰	۱۶/۲۵
۱۷/۲۵ − ۱۹/۲۵	۳	۰/۱۵	۱۸/۲۵
۱۹/۲۵ − ۲۱/۲۵	۴	۰/۲۰	۲۰/۲۵
۲۱/۲۵ − ۲۳/۲۵	۶	۰/۳۰	۲۲/۲۵
۲۳/۲۵ − ۲۵/۲۵	۳	۰/۱۵	۲۴/۲۵
۲۵/۲۵ − ۲۷/۲۵	۱	۰/۰۵	۲۶/۲۵

در ابتدا میانگین با استفاده از جدول توزیع فراوانی محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \\ &= \frac{(۱۴/۲۵ \times ۱) + (۱۶/۲۵ \times ۲) + \cdots + (۲۶/۲۵ \times ۱)}{۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۶ + ۳ + ۱} = ۲۰/۷۵ cm\end{aligned}$$

سپس واریانس با استفاده از جدول توزیع فراوانی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^۲ = \frac{[(۱۴/۲۵ - ۲۰/۷۵)^۲ ۱] + [(۱۶/۲۵ - ۲۰/۷۵)^۲ ۲]}{}$$

$$\frac{+ \cdots + [(۲۶/۲۵ - ۲۰/۷۵)^۲ ۱]}{۲۰}$$

کرده سپس میانگین و واریانس آن‌ها محاسبه شوند. سپس میانگین و واریانس متغیر اصلی به کمک روابط موجود به دست آیند. اگر نشان دسته‌ها در مثال ۱-۱۸ بر ۱۰ تقسیم شوند، محاسبه واریانس داده‌های حاصل ساده‌تر است.

x_i	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۳	۵	۲	۵	۵

$$\sigma_x^۲ = \frac{(۲^۲ \times ۳) + \cdots + (۶^۲ \times ۵) - \frac{[(۲\times۳)+(۳\times۵)+\cdots+(۶\times۵)]^۲}{۲۰}}{۲۰} = ۲/۰۶$$

اگر واریانس حاصل (۲/۰۶) در $۱۰^۲$ ضرب شود واریانس داده‌های اصلی ۲۰۶ به دست می‌آید. روش دیگر ساده کردن این است که ابتدا میانگین از همه داده‌ها کم شده و سپس واریانس داده‌های جدید به دست آیند.

مثال ۱-۱۹. ارتفاع بوته‌ها در جامعه‌ای متشکل از شش بوته، ۲، ۳، ۹، ۵ و ۶ سانتی‌متر بوده است. واریانس را به دست آورید.

اگر میانگین (یعنی ۵) از هرکدام از این داده‌ها کم شود، اعداد ۳-، ۲-، ۴، ۰ و ۱ به دست خواهند آمد که میانگین آن‌ها برابر با صفر است. واریانس این داده‌ها برابر با واریانس داده‌های اولیه خواهد بود.

$$\begin{aligned}\sigma_{x'}^۲ &= \frac{\sum(x'_i - \mu)^۲}{N} = \frac{\sum(x'_i - ۰)^۲}{N} = \frac{\sum x_i'^۲}{N} \\ &= \frac{۹ + ۴ + ۱۶ + ۰ + ۱}{۵} = ۶cm^۲\end{aligned}$$

اگر مجموع داده‌ها صفر باشد، میانگین نیز برابر با صفر شده و واریانس برابر با مجموع توان دوم داده‌ها تقسیم بر N است.

۱-۱۴-۴ انحراف معیار

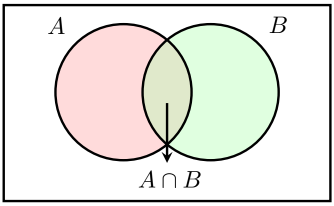
واحد واریانس توان دوم واحد اصلی داده‌هاست درحالی‌که اغلب بیان واحد اندازه‌گیری در همان واحد اصلی داده‌ها موردنظر است. انحراف معیار، چنین معیاری از پراکندگی است که با جذر گرفتن از واریانس به دست می‌آید. انحراف معیار در مورد مثال ۱-۱۹ برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^۲} = \sqrt{۶} = ۲/۴۵cm$$

در اینجا انحراف معیار با ارائه‌ی یک مثال دیگر بیشتر بررسی می‌شود. فرض کنید ۳۰ دانش‌آموز در مسابقه‌های، مسافتی را در فواصل زمانی مختلف پیموده و نتایج بر حسب دقیقه مطابق جدول ۱-۸ بوده است.

همچنین $A \cap B = \{۲\}$. پس

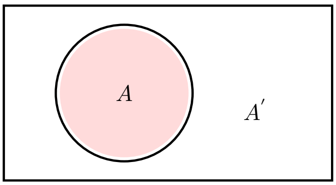
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۶} + \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$
$$P(A \cap B) = P(۲) = \frac{۱}{۶}$$



شکل ۲-۵: نمودار ون که اشتراک دو پیشامد سازگار را نشان می‌دهد.

تعریف ۲-۳ (پیشامد متمم)**.** متمم پیشامد A که با A' یا A^c نشان داده می‌شود، مجموعه اعضایی از فضای نمونه است که در A وجود ندارد. مجموع احتمال پیشامد و متمم آن برابر با یک است. یعنی

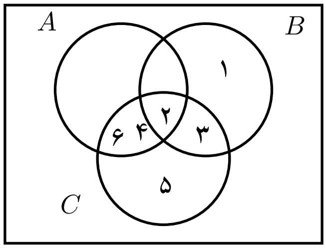
$$P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(S) = ۱.$$



شکل ۲-۶: نمودار ون برای دو پیشامد متمم. مستطیل، فضای نمونه را نشان می‌دهد.

با در نظر گرفتن A و B به عنوان دو پیشامد، روابط زیر برقرار می‌باشند که از میان آن‌ها، به ترتیب روابط $(\star)$ و $(\star\star)$، قوانین دمورگان نامیده می‌شوند.

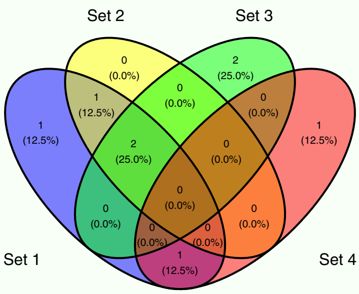
$$(A')' = A$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (\star) \qquad (A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\star\star)$$
$$(A' \cap B')' = A \cup B \qquad (A' \cup B')' = A \cap B$$
$$A = (A \cap B) + (A \cap B') \qquad A' = (A' \cap B) + (A' \cap B')$$

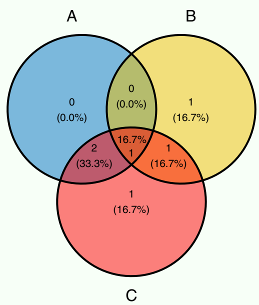


شکل ۲-۸: نمودار ون برای مثال ۲-۸ که در آن مستطیل، فضای نمونه را نشان می‌دهد.

کد ۲-۱: مثال‌هایی از ایجاد نمودار ون در R. در نمودار سمت راست برخلاف نموداری که در مثال ۲-۸ نشان داده شده است، بسته ggven فراوانی اعضا و نسبت آن‌ها را در هر قسمت نمایش داده است.

```
library(ggvenn)
# ایجاد دیاگرام ون: مثال اول
d <- tibble(value   = c(1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9),
`Set 1` = c(T, F, T, T, F, T, F, T),
`Set 2` = c(T, F, F, T, F, F, F, T),
`Set 3` = c(T, T, F, F, F, F, T, T),
`Set 4` = c(F, F, F, F, T, T, F, F))
ggvenn(d, c("Set 1", "Set 2", "Set 3", "Set 4"))

# ایجاد دیاگرام ون: مثال دوم
x <- list(
A = c(2,4,6),
B = c(1,2,3),
C = c(2,3,4,5,6))
ggvenn(x,
fill_color = c("#0073C2FF", "#EFC000FF", "red"),)
#stroke_size = 0.5, set_name_size = 3
```





ج) مقدار $P(A \cup B)$ را از طریق قانون جمع احتمالات به دست آورید.
د) آیا دو پیشامد A و B نسبت به هم ناسازگار هستند؟ چرا؟

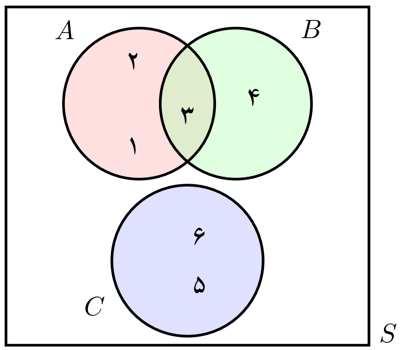
تمرین ۲-۳. اعداد ۲، ۳، ۵، ۶، ۷ و ۹ را در نظر بگیرید. به شرط اینکه تکرار ارقام مجاز نباشد، الف) چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد از این اعداد سه رقمی کمتر از ۴۰۰ هستند؟ ج) چه تعداد از آن‌ها زوج هستند؟ د) چه تعداد از آن‌ها بر ۵ بخش‌پذیر هستند؟

تمرین ۲-۴. چند عدد چهار رقمی بدون عدد تکرار شده وجود دارد؟ چند عدد چهار رقمی زوج بدون عدد تکرار شده وجود دارد؟

تمرین ۲-۵. سه لامپ روشنایی از بین ۱۵ لامپ که فقط ۱۰ تا از آن‌ها سالم هستند انتخاب می‌شود. مطلوب است احتمال اینکه الف) هر ۳ لامپ سالم باشند ب) فقط یک لامپ سالم نباشد ج) حداقل یک لامپ سالم باشد.

تمرین ۲-۶. بین جایگشت و ترکیب چه رابطه‌ای وجود دارد؟ در یک جمله توضیح داده و سپس در قالب یک فرمول نشان دهید.

تمرین ۲-۷. یک فضای نمونه‌ی ۶ عضوی و پیشامدهای A، B و C در نمودار زیر نشان داده است:



اگر $P(\{۱\}) = ۰/۲$، $P(\{۲\}) = ۰/۰۵$، $P(\{۳\}) = ۰/۲۵$، $P(\{۴\}) = ۰/۱$، $P(\{۵\}) = ۰/۱۵$ و $P(\{۶\}) = ۰/۲۵$ باشد، احتمالات زیر را به دست آورید:
الف) $P(A)$، $P(B)$ و $P(C)$
ب) $P(A \cap B)$، $P(A \cap C)$ و $P(B \cap C)$
ج) اگر پیشامد A رخ داده باشد $P(\{۱\})$، $P(\{۲\})$ و $P(\{۳\})$ را به دست آورید.
د) مقدار $P(B|A)$ ، $P(C|A)$ و $P(C|A')$

تمرین ۲-۸. فضای نمونه‌ی ۶ عضوی و پیشامدهای A، B و C را در نمودار ون تمرین قبلی در نظر بگیرید. اگر $P(\{۱\}) = ۰/۲$، $P(\{۲\}) = ۰/۰۵$، $P(\{۳\}) = ۰/۳$، $P(\{۴\}) = ۰/۱$، $P(\{۵\}) = ۰/۱$ و

یعنی اگر احتمال هر مقدار x، به‌عنوان فراوانی نسبیِ رخدادِ آن مقدار در نظر گرفته شود، میانگین یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی x برابر

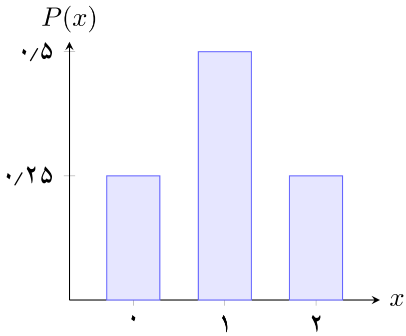
$$\mu_x = E(x) = \sum x \times p(x)$$

است. میانگین x را امید ریاضی x نیز می‌نامند و با $E(x)$ نشان می‌دهند. برای هر متغیر تصادفی x، میانگین، متوسط و مقدار مورد انتظار همگی یک معنی دارند.

همچنین واریانس متغیر تصادفی x، عبارت است از متوسط مربع فواصل xها از میانگین جامعه (μ). اگر احتمال هر مقدار x، فراوانی نسبی رخداد آن مقدار را نشان دهد، می‌توان میانگین مقادیر مختلف $(x-\mu)^۲$ را به‌صورت

$$\sigma^۲ = E(x-\mu)^۲ = \sum (x-\mu)^۲ p(x)$$

به دست آورد. همچنین می‌توان نشان داد که رابطه‌ی $E(x-\mu)^۲ = E(x^۲) - \mu^۲$ برقرار است. عبارت $E(x-\mu)^۲$ امید ریاضی توان دوم انحرافات از میانگین نیز نامیده می‌شود.



شکل ۳-۳: نمودار میله‌ای توزیع احتمال برای پرتاب هم‌زمان دو سکه.

۳-۵ توزیع دوجمله‌ای

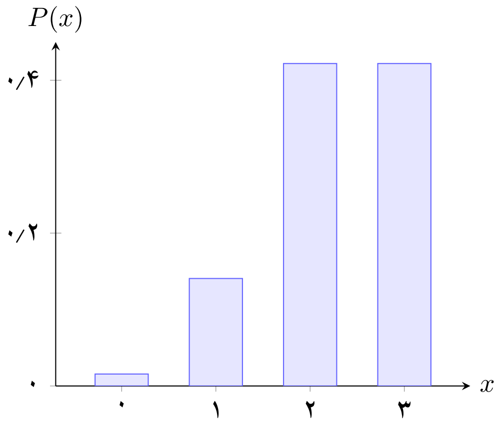
در بسیاری از آزمایش‌ها، نتیجه از دو حالت شکست یا پیروزی خارج نیست. به این آزمایش‌ها، آزمایش برنولی گفته می‌شود و در آن‌ها مقدار متغیر تصادفی برای حالت شکست، صفر و برای حالت پیروزی، یک در نظر گرفته می‌شود.

در آزمایش برنولی احتمال پیروزی برابر p (عددی بین صفر و یک) و احتمال شکست برابر $q = ۱ - p$

جدول ۳-۳: جدول توزیع احتمال برای آزمایش دوجمله‌ای مشاهده تعداد بذور سیاه (x) در یک نمونه سه‌تایی بذر $F_۲$.

x	۰	۱	۲	۳
$P(x)$	۰/۰۱۶	۰/۱۴۰	۰/۴۲۲	۰/۴۲۲

با توجه به اینکه p و q باهم برابر نیستند، پس شکل توزیع نامتقارن و به صورت زیر است:



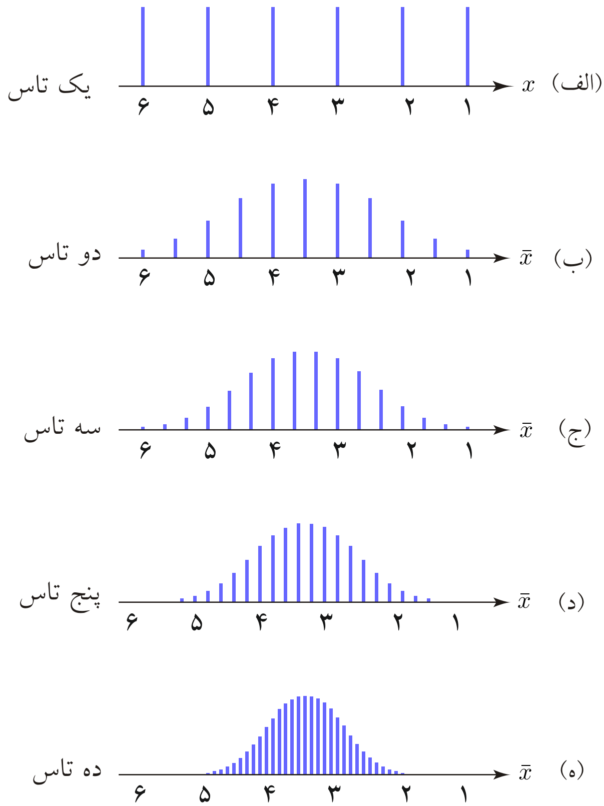
شکل ۳-۶: نمودار توزیع دوجمله‌ای برای تعداد بذور سیاه در نمونه‌های سه‌تایی بذر از جمعیت $F_۲$ حاصل از تلاقی دو واریته‌ی متفاوت.

مثال ۳-۵. داروی خاصی بر روی ۷۰٪ از افراد مبتلا به یک نوع بیماری مؤثر است. فرض کنید ۵ بیمار تحت تأثیر دارو قرارگرفته و x تعداد افراد بهبودیافته از بین این ۵ نفر باشد. توزیع احتمال x در زیر آورده شده است. میانگین (μ) و انحراف معیار (σ) را به دست آورده و نتایج را تفسیر کنید. بافت‌نگار $P(x)$ را رسم کرده و فاصله‌ی $\mu \pm ۲\sigma$ را بر روی آن مشخص کنید. با استفاده از قاعده‌ی چبیشف و قاعده‌ی تجربی (۱) احتمال قرار گرفتن x در خارج از این محدوده را مشخص کنید. نتیجه را با احتمال واقعی مقایسه نمایید.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$P(x)$	۰/۰۰۲	۰/۰۲۹	۰/۱۳۲	۰/۳۰۹	۰/۳۶۰	۰/۱۶۸

از آنجا که میانگین یک توزیع نشان‌دهنده‌ی متوسط مقدار متغیر تصادفی است، بنابراین

$$\begin{aligned}\mu = E(x) &= \sum xp(x)\\ &= ۰(۰/۰۰۲) + ۱(۰/۰۲۹) + \cdots + ۵(۰/۱۶۸)\\ &= ۳/۵\end{aligned}$$



شکل ۵-۳: توزیع میانگین‌ها در پرتاب دو، سه، پنج یا ده تاس در مقایسه با توزیع جامعه.

فرض کنید که نمرات دانشجویان یک کلاسِ بزرگِ آمار دارای توزیع نرمال با میانگین ۷۲ و انحراف معیار ۹ باشند. الف) احتمال آنکه نمونه‌ای تصادفیِ مرکب از ۵ دانشجو دارای نمره متوسطی بالای ۸۰ باشند را پیدا کنید. ب) احتمال اینکه یک دانشجو به تصادف انتخاب شده و دارای نمره‌های بالاتر از ۸۰ باشد، چقدر است؟

حل) الف: قضیه‌ی حد مرکزی به ما اطمینان می‌دهد که $\bar{x}$ دارای توزیعی تقریباً نرمال با میانگین μ و انحراف معیار $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ است. بنابراین

$$(\bar{x} \geq ۸۰) = P(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \frac{۸۰-۷۲}{۹/\sqrt{۵}}) = P(z \geq ۱/۹۸۷) = ۰/۰۲۳$$

$$P(x \geq ۸۰) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{۸۰-۷۲}{۹}) = P(z \geq ۰/۸۹) = ۰/۱۸۷$$

نداده است. مقدار احتمال را در این مثال به‌صورت زیر است که در نرم‌افزارهای آماری محاسبه می‌شود.

$$P.value = P(t \geq ۰/۷۳) = ۰/۲۴۹.$$

کد ۷-۳: کدهای لازم برای حل مثال ۷-۴ در نرم‌افزار R.

```
a <- c(2.1, 2.7, 3.4, 0.8, 3.0, 1.7)
t.test(a, mu = 2, alternative = "greater")
------------------------------------------------
One Sample t-test

data:  a
t = 0.73089, df = 5, p-value = 0.2488
alternative hypothesis: true mean is greater than 2
95 percent confidence interval:
1.502186      Inf
sample estimates:
mean of x
2.283333
```

تعریف ۷-۵. خلاصه‌ی آزمون فرض در مورد میانگین جامعه (μ) با استفاده از نمونه‌ی کوچک. (تعداد اعضای نمونه کمتر از ۳۰ است، در نتیجه $s^۲$ برآورد خوبی برای $\sigma^۲$ نیست.)

فرض صفر	**فرض مقابل**
$H_۰ : \mu = \mu_۰$	$H_۱ : \mu > \mu_۰$ (آزمون یک‌طرفه‌ی راست)
	$H_۱ : \mu < \mu_۰$ (آزمون یک‌طرفه‌ی چپ)
	$H_۱ : \mu \neq \mu_۰$ (آزمون دوطرفه)

آماره‌ی آزمون:

$$t_۰ = \frac{\bar{x} - \mu_۰}{\sqrt{\frac{s^۲}{n}}}$$

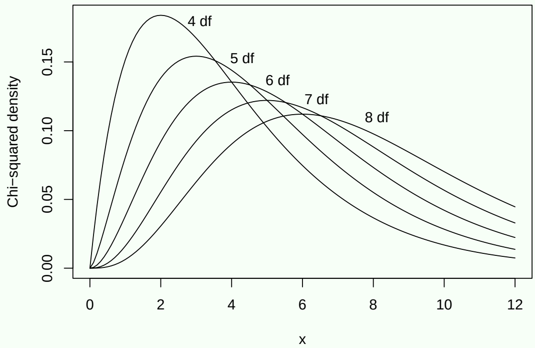
نواحی رد متناظر با آزمون‌ها

$t_۰ \geq t_\alpha$ (آزمون یک‌طرفه‌ی راست)

$t_۰ \leq -t_\alpha$ (آزمون یک‌طرفه‌ی چپ)

$|t_۰| \geq t_{\alpha/۲}$ (آزمون دوطرفه)

که در آن t_α و $t_{\alpha/۲}$ براساس $n - ۱$ درجه آزادی می‌باشند. همچنین فرض بر این است که نمونه به طور تصادفی از جامعه‌ای نرمال انتخاب شده است.



شکل ۷-۱۲: شکل توزیع کای‌دو برای درجه آزادی‌های مختلف.

یکی از موارد استفاده از توزیع کای‌دو در آزمون فرض واریانس توزیع است. فرض کنید که آزمون برابری واریانس یک جامعه ($\sigma^۲$) با مقدار ثابتی نظیر ($\sigma_\circ{}^۲$) به‌صورت

$$H_\circ : \sigma^۲ = \sigma_\circ{}^۲$$
$$H_۱ : \sigma^۲ \neq \sigma_\circ{}^۲$$

مورد نظر باشد. آماره‌ی کای‌دو از تقسیم مجموع توان‌های دوم مشاهدات نمونه بر واریانس توزیع تحت فرض $H_\circ$ به‌صورت

$$\chi_\circ^۲ = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^۲}{\sigma_\circ{}^۲}$$

محاسبه می‌شود. مقدار آماره‌ی محاسبه شده با کای‌دو جدول مربوط به سطح مورد نظر مقایسه و چنانچه در ناحیه رد قرار گرفت، فرض صفر رد می‌شود.

مثال ۷-۸. در تحقیقات ژنتیکی وجود تنوع کافی بین مواد آزمایشی ضروری است. محققی مطالعات خود را روی موش‌هایی انجام می‌دهد که انحراف معیار وزن آن‌ها ۱۰۰ گرم است. وی متوجه می‌شود که تنوع وزن موش‌ها برای آزمایشات او کافی نیست. به همین دلیل به دنبال جایگزینی موش‌ها با نژاد دیگری است. او از یک نژاد جدید ابتدا ۱۰ موش را به طور تصادفی انتخاب کرده و وزن آن‌ها را اندازه می‌گیرد. مشاهدات حاصل عبارت‌اند از: ۷۵، ۱۲۵، ۲۰۰، ۲۵۰، ۱۸۰، ۹۰، ۱۷۰، ۱۱۰، ۲۱۰، ۱۴۰. فرض‌ها و مقدار آماره‌ی آزمون در این مورد به‌صورت زیر می‌باشند.

$$H_\circ : \sigma = ۱۰۰$$
$$H_۱ : \sigma > ۱۰۰$$

درجه آزادی برابر با $df = k - p - ۱$ است که در آن k برابر با تعداد طبقات و p تعداد پارامترهایی است که از روی نمونه برآورد شده است. با توجه به اینکه دو پارامتر میانگین و انحراف معیار جامعه از روی نمونه برآورد شده‌اند، درجه آزادی برابر با $df = ۸ - ۲ - ۱ = ۵$ خواهد بود و چون آماره $\chi^۲$ محاسبه شده کوچکتر از $\chi^۲_{٫۰۵,۵} = ۱۱٫۰۷$ است، دلیل کافی برای رد فرض صفر وجود نداشته فرض نرمال بودن داده‌ها رد نمی‌شود. تابع `pchiTest` در بسته `fBasics` فرض نرمال بودن مجموعه‌ای از داده‌های خام را با استفاده از آماره کای‌دو انجام می‌دهد.

مثال ۸-۵. تعداد ۳۵ نمونه ۱۰۰ گرمی بذر کلزا از یک گونی استخراج شده و تعداد بذرهای علف هرز (x) در هر نمونه شمارش و در جدول زیر آمده است. آیا تعداد بذرهای علف هرز در هر ۱۰۰ گرم بذر کلزا از توزیع پواسن پیروی می‌کند؟

x_i	۰	۱	۲	۳	مساوی یا بیشتر از ۴
فراوانی	۲	۶	۱۰	۱۰	۷

با فرض اینکه داده‌ها از توزیع پواسن پیروی می‌کنند، میانگین (λ) از روی نمونه به‌صورت

$$\bar{x} = \hat{\lambda} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{۸۴}{۳۵} = ۲٫۴$$

محاسبه می‌شود. احتمال مشاهده هر کدام از مقادیر x در توزیع پواسن با میانگین ۲٫۴ از رابطه $P(x) = \dfrac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}$ محاسبه می‌شود. برای مثال احتمال صفر بودن x برابر با

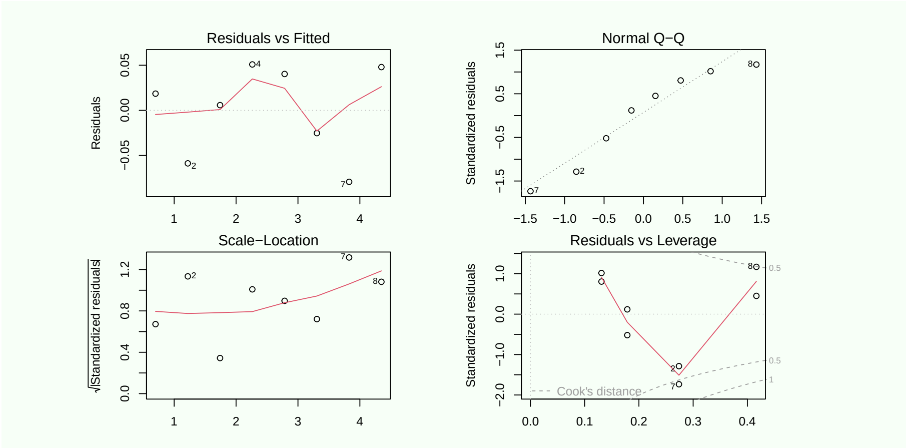
$$P(x = ۰) = \frac{۲٫۴^۰ . e^{-۲٫۴}}{۰!} = e^{-۲٫۴} = ۰٫۰۹۰۷۱۸$$

و فراوانی مورد انتظار برای $x = ۰$ برابر با $۰٫۰۹۰۷۱۸ \times ۳۵ = ۳٫۱۷۵$ است. به همین ترتیب فراوانی مورد انتظار را می‌توان برای سایر xها به دست آورد.

آماره $\chi^۲$ با استفاده از فراوانی‌های مشاهده شده و مورد انتظار برابر

$$\chi_۰{}^۲ = \sum \frac{(O_i - E_i)^۲}{E_i} = \frac{(۲ - ۳٫۱۷۵)^۲}{۳٫۱۷۵} + \frac{(۶ - ۷٫۶۲)^۲}{۷٫۶۲} + \cdots + \frac{(۷ - ۷٫۷۴۵)^۲}{۷٫۷۴۵} = ۱٫۹۱$$

است. با توجه به اینکه یک پارامتر (میانگین) جامعه از روی نمونه برآورد شده است، لذا درجه آزادی برابر با $۵ - ۱ - ۱ = ۳$ خواهد بود. با توجه به اینکه آماره $\chi^۲$ محاسبه شده کوچکتر از $\chi^۲_{٫۰۵,۳} = ۷٫۸۱$ است، دلیل کافی برای رد فرض صفر وجود نداشته و می‌توان گفت داده‌ها از توزیع پواسن پیروی می‌کنند.



در اینجا مقادیر y با سرعت بیشتری نسبت به مقادیر x افزایش یافته است. برای خطی کردن چنین رابطه‌ای ممکن است تبدیل y به $\ln y$ به‌صورت زیر مفید باشد.

x (سال)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$\ln(y)$	۰/۶۹	۱/۰۲	۱/۶۱	۲/۰۸	۲/۴۸	۲/۸۳	۳/۱۸	۳/۶۴

بررسی مثال ۱۱-۵ در کد ۱۱-۱۳ نشان می‌دهد که پس از تبدیل لگاریتمی، مشاهدات تبدیل‌یافته در راستای یک خط مستقیم قرار دارند. ضریب تعیین رگرسیون خطی برای این مشاهدات تبدیل شده برابر با ۹۹/۶ است، لذا یک رابطه‌ی خطی شدید بین مقادیر x و مقادیر $\ln y$ وجود دارد.

جدول ۱۱-۲: برخی مدل‌های خطی شونده و تبدیل‌های خطی کننده آن‌ها.

مدل غیر خطی	تبدیل	فرم خطی
$y = \alpha x^{\beta}$	$y' = \log y, x' = \log x$	$y' = \log\alpha + \beta x'$
$y = \alpha e^{\beta x}$	$y' = \ln y$	$y' = \ln\alpha + \beta x$
$y = \alpha + \beta\log x$	$x' = \log x$	$y = \alpha + \beta x'$
$y = \dfrac{x}{\alpha x - \beta}$	$y' = \dfrac{1}{y}, x' = \dfrac{1}{x}$	$y' = \alpha + \beta x'$

در این مثال رابطه‌ی رگرسیونی غیرخطی با استفاده از تبدیل لگاریتمی یکی از متغیرها به یک رابطه‌ی رگرسیونی خطی با ضریب تعیین بالا تبدیل شد. در صورتی که تبدیل لگاریتمی چاره‌ساز نباشد، باید تبدیل‌های دیگری را برای داده‌های یکی یا هر دو متغیر آزمود. از تبدیل‌های معمول می‌توان به معکوس کردن داده‌ها ($1/y$ و یا $1/x$)، گرفتن ریشه‌ی دوم ($y^{0.5}$ یا $x^{0.5}$) یا ریشه‌ی چهارم از داده‌ها ($y^{0.25}$ یا $x^{0.25}$) اشاره کرد. در

خواهد بود. در اینجا مجموع رتبه‌های سؤالات A برابر با $R_{1} = ۲۵/۵$، مجموع رتبه‌های سؤالات B برابر با $R_{2} = ۶۵/۵$ و مجموع کل رتبه‌ها برابر با $n(n+1)/2$ است که در آن $n = n_{1} + n_{2}$. این رابطه برای کنترل صحت رتبه‌گذاری کاربرد دارد. در مرحله‌ی بعد آماره‌های U_{1} و U_{2} به‌صورت

$$U_{1} = R_{1} - \frac{n_{1}(n_{1}+1)}{2} = ۲۵/۵ - \frac{۶(۷)}{۲} = ۴/۵,$$
$$U_{2} = R_{2} - \frac{n_{2}(n_{2}+1)}{2} = ۶۵/۵ - \frac{۷(۸)}{۲} = ۳۷/۵$$

محاسبه می‌شود که بین آن‌ها رابطه‌ی $U_{1} + U_{2} = n_{1}n_{2}$ برقرار است. برای آزمون فرض صفر مبنی بر برابر بودن میانه‌های دو جامعه، مینیمم U_{1} و U_{2} با عدد بحرانی در جدول ضمیمه‌ی ۷ مقایسه می‌شود. در صورتی که مینیمم U_{1} و U_{2} مساوی یا کمتر از عدد بحرانی جدول مربوط به سطح مورد نظر و حجم نمونه n_{1} و n_{2} باشد، فرض صفر رد خواهد شد. اگر انجام آزمون دو طرفه در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ مد نظر باشد، کمینه U_{1} و U_{2} با عدد بحرانی جدول مربوط به سطح $\alpha = ۰/۰۲۵$ مقایسه می‌شود.

جدول ۱۲-۱: قسمتی از جدول مقادیر بحرانی U در آزمون من‌ویتنی.

۱n	۲n	%۵	%۲/۵	%۱	%۰/۵	۱n	۲n	%۵	%۲/۵	%۱	%۰/۵
۲	۴	-	-	-	-	۴	۱۶	۱۴	۱۱	۷	۵
۲	۵	۰	-	-	-	۴	۱۷	۱۵	۱۱	۸	۶
۲	۶	۰	-	-	-	۴	۱۸	۱۶	۱۲	۹	۶
۲	۷	۰	-	-	-	۴	۱۹	۱۷	۱۳	۹	۷
۲	۸	۱	۰	-	-	۴	۲۰	۱۸	۱۴	۱۰	۸
۲	۹	۱	۰	-	-	۵	۵	۴	۲	۱	۰
۲	۱۰	۱	۰	-	-	۵	۶	۵	۳	۲	۱
۲	۱۱	۱	۰	-	-	۵	۷	۶	۵	۳	۱
۲	۱۲	۲	۱	-	-	۵	۸	۸	۶	۴	۲
۲	۱۳	۲	۱	۰	-	۵	۹	۹	۷	۵	۳
۲	۱۴	۳	۱	۰	-	۵	۱۰	۱۱	۸	۶	۴
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

```
# آزمون رتبه ویلکاکسون بر روی دو نمونه
a <- c(60,62,68,50,78,66)
b <- c(65,91,75,82,83,78,90)
# آزمون U من‌ویتنی بر روی دو نمونه مستقل
wilcox.test(a,b, conf.int = T)
Wilcoxon rank sum test with continuity correction
data:  a and b
W = 4.5, p-value = 0.02209
alternative hypothesis:
true location shift is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-28.999983  -4.000001
sample estimates:
```

تیمارها درون هر بلوک به طور تصادفی به واحدهای آزمایشی منتسب شده باشند. ۲- داده‌های درون هر بلوک را بتوان رتبه‌بندی نمود. ۳- توزیع احتمال جوامعی که هر بلوک از آن استخراج می‌شود، پیوسته باشد.

در اینجا تعداد تیمارها با k و تعداد بلوک‌ها با n نشان داده می‌شود. داده‌های درون هر بلوک از ۱ تا k رتبه‌گذاری می‌شوند سپس جمع رتبه‌ها برای هر تیمار جداگانه محاسبه و با R_i (برای تیمار iام) نشان داده می‌شود. نهایتاً آماره‌ی آزمون به‌صورت

$$S = \frac{12}{nk(k+1)} \sum [R_i - n(k+1)/2]^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum {R^2}_i - 3n(k+1)$$

محاسبه می‌شود. تحت فرض صفر اگر n یا k از ۵ کمتر نباشند، آماره‌ی S تقریباً دارای توزیع کای‌دو با $k-1$ درجه آزادی است.

آزمون فریدمن نیز آزمونی یک‌طرفه بوده و فرض صفر در آن هنگامی رد می‌شود که مقدار آماره‌ی S مساوی یا بزرگ‌تر از $\chi^2_{(k-1,\alpha)}$ باشد.

مثال ۱۲-۷. نتایج مقایسه‌ی عملکرد چهار رقم گندم بر حسب تن در هکتار که در قالب طرح بلوک‌های کاملاً تصادفی پیاده شده، به‌صورت زیر بوده است:

	واریته‌ی ۱	واریته‌ی ۲	واریته‌ی ۳	واریته‌ی ۴
بلوک ۱	۷/۴ (۲)	۹/۸ (۴)	۷/۳ (۱)	۹/۵ (۳)
بلوک ۲	۶/۵ (۲)	۶/۸ (۳)	۶/۱ (۱)	۸/۰ (۴)
بلوک ۳	۵/۶ (۱)	۶/۲ (۲)	۶/۴ (۲)	۷/۴ (۴)
جمع رتبه	۵	۹	۵	۱۱
میانگین رتبه	۱/۶۷	۳	۱/۶۷	۳/۶۷

آماره‌ی S را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} S &= \frac{12}{3 \times 5 \times 4}[5^2 + 9^2 + 5^2 + 11^2] - 3 \times 3 \times 5 \\ &= \frac{12}{60} \times 252 - 45 = 50.4 - 45 = 5.4 \end{aligned}$$

محاسبه نمود. با توجه به اینکه مقدار آماره S محاسبه شده از $\chi^2_{(3,0.05)} = 7.815$ کوچک‌تر است، پس دلیل کافی برای رد فرض صفر (برابر بودن میانه‌های جوامع) وجود ندارد.

مقدار احتمال در خروجی R (۰/۱۴۵) با مقدار احتمال به دست آمده در روش تحلیل واریانس طرح بلوک‌های کامل تصادفی قابل مقایسه خواهد بود.

```
# آزمون Friedman برای تجزیه طرح بلوک‌های کامل تصادفی #
t1 <- c(7.4, ,5.6 (6.5
t2 <- c(9.8, ,8.6 (2.6
t3 <- c(7.3, ,1.6 (4.6
t4 <- c(9.5, ,0.8 (4.7
y <- c(t1,t2,t3,t4)

t <- factor(rep(1:4, each = 3))
b <- factor(rep(1:3, 4))
c <- data.frame(y,t,b)
c
friedman.test(y t|b)
# که در آن yها مقادیر متغیر، t متغیر گروه‌بندی و b نشان‌دهنده‌ی گروه‌ها است #

Friedman rank sum test

data:  y and t and b
Friedman chi-squared = 5.4, df = 3, p-value = 0.1447
```

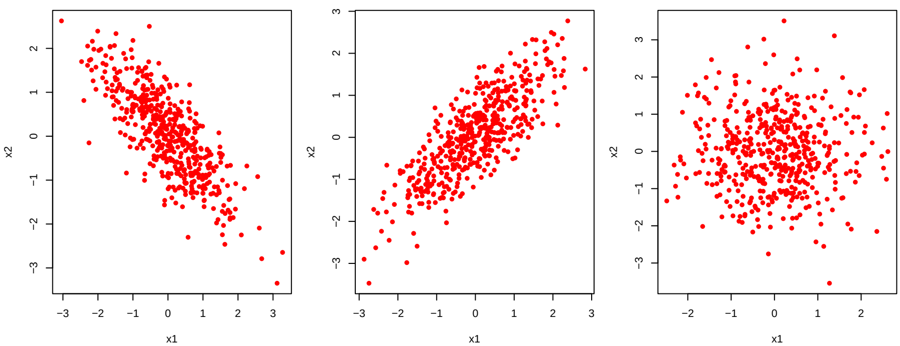
برنامه‌ی R مقدار آماره‌ی S و مقدار احتمال را متناسب با رتبه‌های گره‌خورده تصحیح می‌کند. البته در این مثال رتبه‌ی گره‌خورده وجود ندارد.
درجه آزادی برای آماره‌ی S نیز برابر با تعداد تیمارها منهای یک است. همچنین برنامه‌ی R میانه را برای هر تیمار (۶/۷۷۵ به اضافه‌ی اثر تیمار) محاسبه می‌کند. N نیز در خروجی برنامه تعداد بلوک‌ها را نشان می‌دهد.

۱۲-۷ ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن

ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن (r_s) شاخصی است که ارتباط خطی بین رتبه‌ها را نشان می‌دهد.
ضریب همبستگی رتبه‌ی اسپیرمن همانند ضریب همبستگی پیرسون محاسبه می‌شود با این تفاوت که در آن از رتبه‌ها استفاده می‌شود.

مثال ۱۲-۸. فرض کنید ۱۰ تابلوی نقاشی توسط دو متخصص رتبه‌گذاری شده و نتایج زیر بدست آمده است:

```
# رسم نمودار نقطه‌ای دو متغیر ایجاد شده:
plot(d1, xlab="x1", ylab="x2", pch = 16, col = "red")

# ایجاد دو مجموعه داده تصادفی بامیانگین صفر و ضریب همبستگی برابر با ۰/۸
d2 <- rmvnorm(500, mean = c(0,0), sigma = matrix(c(1, ,8. ,8. 1),
2,2))
# رسم نمودار نقطه‌ای دو متغیر ایجاد شده:
plot(d2, xlab="x1", ylab="x2", pch = 16, col = "red")
# ایجاد دو مجموعه داده تصادفی بامیانگین صفر و ضریب همبستگی برابر با ۰
d3 <- rmvnorm(500, mean = c(0,0), sigma = matrix(c(1, 0, 0, 1),
2,2))
# رسم نمودار نقطه‌ای دو متغیر ایجاد شده:
plot(d3, xlab="x1", ylab="x2", pch = 16, col = "red")
```



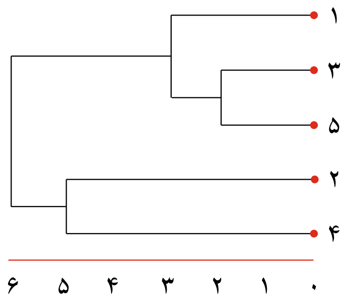
شکل ۱۳ - ۲: نمودار نقطه‌ای دو متغیره با r مساوی ۰/۸ $-$ (سمت چپ)، ۰/۸ $+$ (وسط) و ۰ (سمت راست)

۱۳ - ۵ توزیع نرمال چندمتغیره

بردار تصادفی X با $p \times 1$ بعد که دارای یک توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین μ و ماتریس واریانس‌ـ کواریانس Σ است، دارای تابع چگالی زیر خواهد بود:

$$f(x) = (\frac{1}{2\pi})^{p/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)]$$

عبارت $|\Sigma|$ دترمینان ماتریس واریانس‌ـ کواریانس Σ و Σ^{-1} معکوس آن است. این تابع بیشترین مقادیر را به ازای بردار میانگین X برابر با بردار μ خواهد داشت. اگر p برابر با ۲ باشد، ساده‌ترین حالت ممکن یعنی



شکل ۱۳-۱۱: دندروگرام حاصل از روش اتصال نزدیک‌ترین همسایه‌ها.

اگر چه روش مشخصی برای تعیین محل برش دندروگرام وجود ندارد ولی توصیه‌هایی در این ارتباط وجود دارد از جمله اینکه ۱. دندروگرام را از جایی برش دهیم که توجیهی منطقی برای گروه‌های ایجاد شده وجود داشته باشند. ۲. در محل برش بیشترین فاصله بین گروه‌های حاصل وجود داشته باشد. ۳. یک پیشنهاد در حالتی که تعداد افراد زیاد است این است که دندروگرام طوری برش یابد که $\sqrt{n/۲}$ گروه ایجاد شود. ۴. پس از برش واریانس بین گروه‌ها حداکثر شود.

ماتریس کوفنتیک

ماتریس کوفنتیک ماتریسی است که از نقاط اتصال افراد در دندروگرام به دست می‌آید. در ادامه این ماتریس در مورد دندروگرام مثال اخیر (Y) به همراه ماتریس فاصله مورد استفاده در رسم دندروگرام (X) آورده شده‌اند:

$$Y = \begin{pmatrix} ۶ & & & \\ ۳ & ۶ & & \\ ۶ & ۵ & ۶ & \\ ۳ & ۶ & ۲ & ۶ \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} ۹ & & & \\ ۳ & ۷ & & \\ ۶ & ۵ & ۹ & \\ ۱۱ & ۱۰ & ۲ & ۸ \end{pmatrix}$$

X	۹	۳	۶	۱۱	۷	۵	۱۰	۹	۲	۸
Y	۶	۳	۶	۳	۶	۵	۶	۶	۲	۶

$$\rho_{(x,y)} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^۲}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^۲}} = ۰/۵۱۴$$

داشتیم، ضریب همبستگی این دو ماتریس که ضریب همبستگی کوفنتیک نام دارد برابر با $r = ۰/۵۱۴$ است. از آنجا که X ماتریس فاصله‌های ورودی و Y ماتریس فاصله‌های خروجی است، ضریب همبستگی بین آن‌ها

نشان می‌دهد که خوشه‌بندی تا چه حد توانسته است فاصله‌های اولیه را در یک دندروگرام نشان دهد. برای رسیدن به یک دندروگرام بهینه، معمولاً به ازای ماتریس‌های فاصله مختلف و روش‌های مختلف رسم دندروگرام، ضرایب r را محاسبه می‌کنند و هر حالت که ضریب هبستگی بالاتری به دست داد مناسبتر خواهد بود. البته شکل دندروگرام نیز مهم است و دندروگرام‌های زنجیره‌ای شده مطلوب نیستند مگر اینکه این حالت به دلیل ماهیت داده‌ها باشد.

۲. روش اتصال دورترین همسایه‌ها: مراحل روش اتصال دورترین همسایه‌ها مشابه روش اتصال نزدیک‌ترین همسایه‌ها است با این تفاوت که به جای مقدار کمینه، مقدار بیشینه فواصل افراد در نظر گرفته می‌شود. این روش گرایش به ایجاد گروه‌هایی با قطر یکسان در دندروگرام دارد و به شدت تحت تأثیر داده‌های پرت قرار می‌گیرد.

۳. روش UPGMA: روش UPGMA گرایش به ایجاد گروه‌هایی با واریانس یکسان در دندروگرام دارد. مراحل این روش هم مشابه روش اتصال نزدیک‌ترین همسایه‌ها است با این تفاوت که به جای مقدار کمینه، میانگین فواصل افراد در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن ماتریس فاصله زیر:

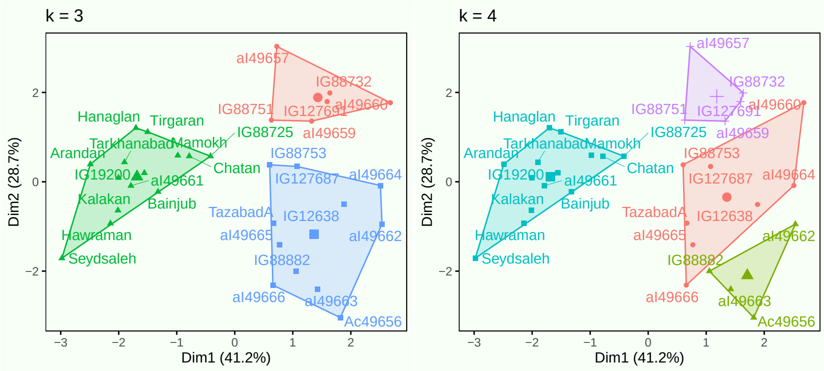
$$X = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰ & & & & \\ ۹ & ۰ & & & \\ ۳ & ۷ & ۰ & & \\ ۶ & ۵ & ۹ & ۰ & \\ ۱۱ & ۱۰ & ۲ & ۸ & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

ابتدا افراد ۳ و ۵ که نزدیک‌ترین فاصله را دارند با هم ترکیب می‌شوند. در مرحله بعد فاصله خوشه ۳۵ از بقیه افراد یا خوشه‌ها به دست می‌آید:

$$d_{۳۵,۱} = mean\{d_{۳,۱}, d_{۵,۱}\} = (۳ + ۱۱)/۲ = ۷$$
$$d_{۳۵,۲} = (۱۰ + ۷)/۲ = ۸/۵$$
$$d_{۳۵,۴} = (۹ + ۲)/۲ = ۵/۵$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ۳۵ & ۱ & ۲ & ۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۳۵ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰ & & & \\ ۷ & ۰ & & \\ ۸/۵ & ۹ & ۰ & \\ ۵/۵ & ۶ & ۵ & ۰ \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} ۳۵ & ۲۴ & ۱ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۳۵ \\ ۲۴ \\ ۱ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰ & & \\ ۷ & ۰ & \\ ۷ & ۷/۵ & ۰ \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} ۱۳۵ & ۲۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱۳۵ \\ ۲۴ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰ & \\ ۷/۲۵ & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

```
grid.arrange(p1, p2, nrow = 1)
fviz_cluster(k1, data = d, repel = T, ellipse = T)
```



شکل ۱۳-۱۹: نتیجه خوشه‌بندی K-means برای تعداد خوشه‌های ۳ و ۴ بعد از انجام PCA

۱۳-۱۴ تجزیه‌ی عاملی

هدف از تجزیه‌ی عاملی در صورت امکان توصیف همبستگی بین متغیرها به‌وسیله‌ی تعدادی عامل‌های موثر بر متغیرها است. اگر متغیرها به چند گروه تقسیم شوند به طوری که متغیرهای هر گروه با هم همبستگی داشته ولی همبستگی کمی بین گروه های مختلف وجود داشته باشد، احتمالا هر گروه از متغیرها، یک جنبه از ماهیت داده‌ها را نشان می‌دهند به عبارت دیگر عاملی مسئول همبستگی بین متغیرهای هر گروه است.

$$
\begin{aligned}
X_1 - \mu_1 &= l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + \cdots + l_{1m}F_m + \varepsilon_1 \\
X_2 - \mu_2 &= l_{21}F_1 + l_{22}F_2 + \cdots + l_{2m}F_m + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
X_p - \mu_p &= l_{p1}F_1 + l_{p2}F_2 + \cdots + l_{pm}F_m + \varepsilon_p
\end{aligned}
$$

در تجزیه‌ی عاملی، عامل به یک متغیر مخفی گفته می‌شود که بر روی گروهی همبسته از متغیرهای مشاهده‌شده تأثیر می‌گذارد. با وجود n فرد و p متغیر که به طور کلی با بکدیگر همبستگی دارند، تجزیه‌ی عاملی به این سوال پاسخ می‌دهد که آیا با تعداد کمی از فاکتورها (کمتر از تعداد متغیرها) می‌توان تغییرات بین داده‌ها را توجیه و عوامل دخیل را شناسایی کرد؟ اگر اعداد خارج از قطر اصلی ماتریس همبستگی یا واریانس-کواریانس نزدیک به صفر باشند، متغیرها همبستگی نداشته و لذا تجزیه عاملی مفید نخواهد بود. روش‌های

ظاهر خواهد شد. قسمت‌های مختلف برنامه شامل موارد زیر است:

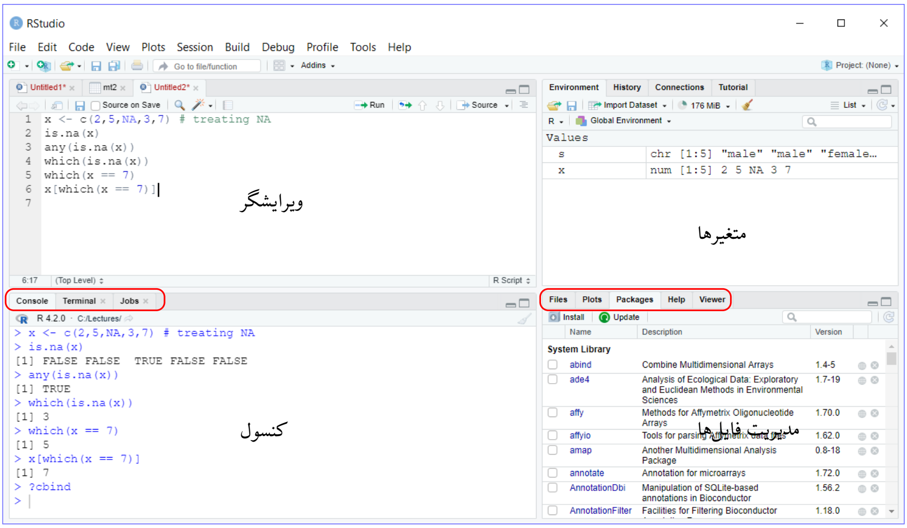
نوار منو و نوار استاندارد

مدیریت فایل‌ها) در این بخش، مسیر جاری، بسته‌های نصب شده و خروجی نمودارها را می‌توان مشاهده کرد.

متغیرها) در این قسمت متغیرهای مختلف تعریف شده در R را می‌توان مشاهده کررد.

ویرایشگر) ویرایشگر کد مکان اصلی برنامه نویسی در R است.

کنسول (نمایشگر خروجی محاسبات و همچنین امکان اجرای دستورات پس از وارد کردن آن‌ها)



شکل ۱۴-۱: نمای کلی برنامه RStudio. همانگونه که در کادر قرمز مشاهده می‌شود در قسمت مدیریت فایل‌ها تب‌های مختلفی برای مشاهده فایل‌ها، نمودارهای ایجاد شده بسته‌های نصب شده و صفحات راهنما وجود دارد

برای به روز کردن `Rstudio` و بسته‌های نصب شده به ترتیب به مسیرهای `Rstudio < Help < Check for Updates` و `Rstudio < Tools < Check for Package Updates` بروید.

برای مشاهده نسخه‌ی R مورد استفاده، دستور `version` را در Rstudio اجرا کنید تا نسخه R مورد استفاده مشاهده شود.

۱۴-۲ عملیات ریاضی ساده

در کنسول R، می‌توانید دستورات را مستقیماً در کنسول مقابل علامت بزرگ‌تر (<) تایپ کنید و با فشار دادن کلید اینتر آن‌ها را اجرا کنید. همچنین می‌توان دستورات را در پنجره ویرایشگر وارد کرد و با کلیک بر روی

۱۴-۵-۲ ماتریس

ماتریس در R مجموعه‌ای از عناصر همنوع (عددی، حروفی یا منطقی) است که در تعدادی ردیف و ستون چیده شده‌اند. لذا ماتریس دارای دو بعد ردیف و ستون است. در ادامه مثال‌هایی از ماتریس آورده شده است. ویژگی اصلی ماتریس این است که عناصر همنوع دارد. عمده‌ترین تابع برای ساختن ماتریس در R تابع `matrix` است که می‌تواند یک بردار را به ماتریس تبدیل کند و برای این کار آرگومان‌هایی برای نحوه چینش داده‌ها دارد. عبارت `byrow` باعث می‌شود عناصر به ترتیب در ردیف‌ها قرار گیرند.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ ۲ & ۵ & ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & ۷ & ۱۱ \\ ۴ & ۹ & ۹ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{pmatrix}_{۲\times۳} \times \begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{pmatrix}_{۳\times۲} = \begin{pmatrix} ۲۲ & ۴۹ \\ ۲۸ & ۶۴ \end{pmatrix}_{۲\times۲}$$

ماتریس واحد

ماتریس واحد یک ماتریس مربع است که عناصر قطر اصلی آن برابر با ۱ و عناصر خارج از قطر اصلی صفر است. در R می‌توان با تابع `diag(n)` ماتریس واحد ایجاد کرد. با ضرب یک ماتریس مربع مانند A در یک ماتریس واحد هم‌اندازه، همان ماتریس A به دست خواهد آمد.

ضرب ماتریس در یک مقدار ثابت

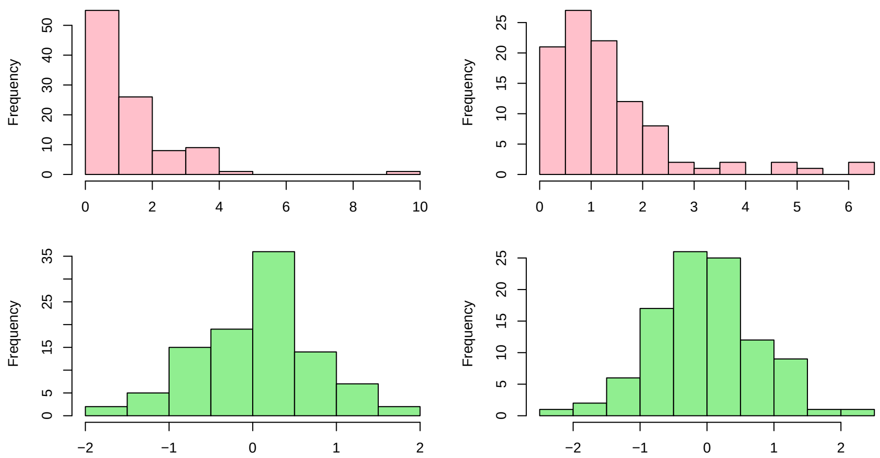
برای ضرب یک ماتریس در یک مقدار ثابت، تک‌تک عناصر ماتریس باید در آن مقدار ثابت ضرب شوند. برای مثال ضرب ماتریس A در عدد ۵ در R با دستور `5*A` انجام می‌شود.

برگردان ماتریس

ماتریس برگردان ماتریسی است که جای سطر و ستون‌های آن عوض شده باشد. برگردان ماتریس A در R را می‌توان با دستور `t(A)` ایجاد کرد.

عکس ماتریس

حاصل‌ضرب یک ماتریس در عکس آن برابر با ماتریس واحد با همان ابعاد خواهد شد. عکس ماتریس را می‌توان با تابع `solve` محاسبه کرد. در ادامه برداری متشکل از ۹ عدد با استفاده از تابع `matrix` به یک ماتریس ۳ در ۳ تبدیل و عکس آن محاسبه شده است. برای تایید، می‌توان عکس ماتریس حاصل را در خود



شکل ۱۴-۴: هیستوگرام ستون‌های داده‌های اولیه و داده‌های تبدیل شده.

بردار انجام داد. به این ترتیب داده‌ها براساس سطوح مختلف یک متغیر عامل طبقه‌بندی شده و محاسبه تابع (مثلا میانگین) برای هر سطح جداگانه صورت می‌گیرد. پارامترهای تابع tapply به‌صورت `tapply(X, INDEX, FUN = NULL)` هستند. مشخص است که بیشتر پارامترهای این تابع به جز INDEX مانند توابع دیگر خانواده apply هستند. در اینجا INDEX بیانگر متغیر گروه‌بندی است.

```
tapply(iris$Sepal.Length, iris$Species, mean)        # محاسبه میانگین طول sepal برای گونه‌های مختلف
setosa versicolor  virginica
 5.006      5.936      6.588
```

محاسبه‌ی میانگین، انحراف معیار، خطای معیار ستون‌های جدول با استفاده از تابع apply:

```
df <- read.table("1.txt",header=T)
df
  species ssp count   ln   st head   wt
1       a   a     3 30.0 22.3 31.2  9.5
2       a   a     4 40.5 19.7 30.4 13.8
3       a   b     3 42.0 20.8 30.6 14.8
4       a   b     5 51.0 20.3 30.3 15.7
5       b   a     2 50.0 20.8 30.3 15.5
6       b   a     1 53.0 21.5 30.8 17.6
7       b   b     2 55.0 20.6 32.5 18.6
8       b   b     7 59.0 21.5   NA 22.7

mean <- apply(df[4:7], 2, FUN = mean, na.rm = T)
```

```
meanDf <- function(x){
   b <- c()
   for(i in 1:ncol(x))
      if(class(x[,i]) != 'character')
         b[i] <- i
   b <- na.omit(b)
   sapply(x[,b], mean)
}
df <- data.frame(a = 1:5, b = letters[1:5], c = 5)
meanDf(df)
a c
3 5
```

تابعی که تبدیل باکس_کاکس را بر روی ستون‌های عددی اعمال می‌کند و ستون‌های غیر عددی را بدون تغییر باقی می‌گذارد.

```
BoxCox <- function(x){
   library(car)
   pow <- function(x) bcPower(x, powerTransform(x)$lambda)
   for(i in 1:ncol(x))
      ifelse(class(x[,i]) != 'character',
            x[,i] <- pow(x[,i]),
            x[,i] <- x[,i])
   x
}
df <- data.frame(a = 10:14, b = letters[1:5], c = 1:5)
BoxCox(df)
         a b         c
1 5.790721 a 0.0000000
2 6.293040 b 0.8889156
3 6.782140 c 1.6439175
4 7.259432 d 2.3232841
5 7.726080 e 2.9514327
```

ایجاد محدودیت برای آرگومان‌های یک تابع.

```
agec <- function(age, gender){
if(class(age) != "numeric")
                  stop("inter your age in the first argument!")
if(gender != "male" & gender != "female")
                  stop("gender should be male or female!")

if (age > 12)
if (age < 20)
if (gender == "male")
print("You are a teenage boy.")
else
print("You are a teenage girl.")
```

پیوست ب

جداول ضمیمه

جدول ۱. اعداد تصادفی
جدول ۲. احتمال تجمعی در دنباله راست منحنی نرمال استاندارد
جدول ۳. مقادیر بحرانی توزیع t مربوط به سطوح داده شده
جدول ۴. مقادیر بحرانی توزیع χ^2 مربوط به سطوح داده شده
جدول ۵. مقادیر بحرانی در دنباله راست منحنی توزیع F مربوط به سطوح ۵% و ۱%
جدول ۶. مقادیر بحرانی T در آزمون رتبه ویلکاکسون یا نمونه‌های جفت شده ویلکاکسون
جدول ۷. مقادیر بحرانی U در آزمون من‌ویتنی

جدول ب‌ـ۱ : جدول اعداد تصادفی

۱۵۵۴۴	۸۰۷۱۲	۹۷۷۴۲	۲۱۵۰۰	۹۷۰۸۱	۴۲۴۵۱	۵۰۶۲۳	۵۶۰۷۱	۲۸۸۸۲	۲۸۷۳۹
۰۱۰۱۱	۲۱۲۸۵	۰۴۷۲۹	۳۹۹۸۶	۷۳۱۵۰	۳۱۵۴۸	۳۰۱۶۸	۷۶۱۸۹	۵۶۹۹۶	۱۹۲۱۰
۴۷۴۳۵	۵۳۳۰۸	۴۰۷۱۸	۲۹۰۵۰	۷۴۸۵۸	۶۴۵۱۷	۹۳۵۷۳	۵۱۰۵۸	۶۸۵۰۱	۴۲۷۲۳
۹۱۳۱۲	۷۵۱۳۷	۸۶۲۷۴	۵۹۸۳۴	۶۹۸۴۴	۱۹۸۵۳	۰۶۹۱۷	۱۷۴۱۳	۴۴۴۷۴	۸۶۵۳۰
۱۲۷۷۵	۰۸۷۶۸	۸۰۷۹۱	۱۶۲۹۸	۲۲۹۳۴	۰۹۶۳۰	۹۸۸۶۲	۳۹۷۴۶	۶۴۶۲۳	۳۲۷۶۸
۳۱۴۶۶	۴۳۷۶۱	۹۴۸۷۲	۹۲۲۳۰	۵۲۳۶۷	۱۳۲۰۵	۳۸۶۳۴	۵۵۸۸۲	۷۷۵۱۸	۳۶۲۵۲
۰۹۳۰۰	۴۳۸۴۷	۴۰۸۸۱	۵۱۲۴۳	۹۷۸۱۰	۱۸۹۰۳	۵۳۹۱۴	۳۱۶۸۸	۰۶۲۲۰	۴۰۴۲۲
۷۳۵۸۲	۱۳۸۱۰	۵۷۷۸۴	۷۲۴۵۴	۶۸۹۹۷	۷۲۲۲۹	۳۰۳۴۰	۰۸۸۴۴	۵۳۹۲۴	۸۹۶۳۰
۱۱۰۹۲	۸۱۳۹۲	۵۸۱۸۹	۲۲۶۹۷	۴۱۰۶۳	۰۹۴۵۱	۰۹۷۸۹	۰۰۶۳۷	۰۶۴۵۰	۸۵۹۹۰
۹۳۳۲۲	۹۸۵۶۷	۰۰۱۱۶	۳۵۶۰۵	۶۶۷۹۰	۵۲۹۶۵	۶۲۸۷۷	۲۱۷۴۰	۵۶۴۷۶	۴۹۲۹۶
۸۰۱۳۴	۱۲۴۸۴	۶۷۰۸۹	۰۸۶۷۴	۷۰۷۵۳	۹۰۹۵۹	۴۵۸۴۲	۵۹۸۴۴	۴۵۲۱۴	۳۶۵۰۵
۹۷۸۸۸	۳۱۷۹۷	۹۵۰۳۷	۸۴۴۰۰	۷۶۰۴۱	۹۶۶۶۸	۷۵۹۲۰	۶۸۴۸۲	۵۶۸۵۵	۹۷۴۱۷
۹۲۶۱۲	۲۷۰۸۲	۵۹۴۵۹	۶۹۳۸۰	۹۸۶۵۴	۲۰۴۰۷	۸۸۱۵۱	۵۶۲۶۳	۲۷۱۲۶	۶۳۷۹۷
۷۲۷۴۴	۴۵۵۸۶	۴۳۲۷۹	۴۴۲۱۸	۸۳۶۳۸	۰۵۴۲۲	۰۰۹۹۵	۷۰۲۱۷	۷۸۹۲۵	۳۹۰۹۷
۹۶۲۵۶	۷۰۶۵۳	۴۵۲۸۵	۲۶۲۹۳	۷۸۳۰۵	۸۰۲۵۲	۰۳۶۲۵	۴۰۱۵۹	۶۸۷۶۰	۸۴۷۱۶
۰۷۸۵۱	۴۷۴۵۲	۶۶۷۴۲	۸۳۳۳۱	۵۴۷۰۱	۰۶۵۷۳	۹۸۱۶۹	۳۷۴۹۹	۶۷۷۵۶	۶۸۳۰۱
۲۵۵۹۴	۴۱۵۵۲	۹۶۴۷۵	۵۶۱۵۱	۰۲۰۸۹	۳۳۷۴۸	۶۵۲۸۹	۸۹۹۵۶	۸۹۵۵۹	۳۳۶۸۷
۶۵۳۵۸	۱۵۱۵۵	۵۹۳۷۴	۸۰۹۴۰	۰۳۴۱۱	۹۴۶۵۶	۶۹۴۴۰	۴۷۱۵۶	۷۷۱۱۵	۹۹۴۶۳
۰۹۴۰۲	۳۱۰۰۸	۵۳۴۲۴	۲۱۹۲۸	۰۲۱۹۸	۶۱۲۰۱	۰۲۴۵۷	۸۷۲۱۴	۵۹۷۵۰	۵۱۳۳۰
۶۰۷۵۵	۸۵۱۲۶	۴۱۸۸۰	۰۹۵۶۰	۲۵۵۱۷	۶۲۷۷۴	۴۳۶۲۳	۳۳۸۴۳	۶۶۶۰۵	۸۸۷۵۸
۴۹۴۸۷	۱۳۱۵۲	۸۶۲۴۱	۵۹۶۹۸	۲۶۶۵۲	۲۰۶۸۶	۷۷۴۱۰	۱۶۲۴۰	۴۲۸۳۲	۳۵۶۶۱
۸۶۳۸۶	۹۱۷۸۸	۶۰۸۴۱	۲۵۲۱۵	۰۶۷۸۷	۴۰۷۲۱	۸۸۱۳۳	۴۶۱۱۵	۰۳۷۷۱	۲۶۳۳۵
۷۳۴۳۹	۰۶۳۳۷	۷۲۲۳۷	۱۴۶۹۲	۱۳۶۹۵	۹۱۹۷۵	۲۹۵۰۸	۵۶۵۲۷	۷۴۷۱۸	۶۰۸۲۱
۲۱۲۹۷	۳۴۱۶۵	۷۱۰۳۹	۶۹۳۰۰	۶۰۹۸۷	۹۳۹۷۰	۳۱۷۶۴	۱۳۷۶۳	۹۹۸۹۶	۹۵۰۴۴
۱۵۰۸۳	۱۹۴۴۱	۹۹۸۶۴	۰۸۴۰۰	۹۷۶۹۴	۳۸۳۳۸	۴۲۷۴۱	۰۶۱۴۳	۴۷۶۹۴	۸۳۷۴۶
۱۸۸۰۵	۱۹۸۹۶	۸۳۱۲۴	۸۰۵۸۸	۴۸۷۴۴	۸۱۶۶۸	۱۰۰۵۶	۶۳۴۰۲	۴۲۵۶۲	۲۷۹۹۸
۷۶۳۷۹	۵۴۹۳۷	۱۴۷۵۶	۷۱۴۱۸	۲۸۰۱۷	۸۵۹۲۷	۱۴۵۱۰	۱۰۹۸۸	۳۲۳۲۳	۸۲۶۸۵
۳۴۲۰۸	۶۹۵۰۳	۸۱۱۳۳	۰۸۴۲۱	۷۵۷۵۷	۱۸۷۷۰	۰۴۱۹۷	۲۲۷۰۷	۱۳۸۶۲	۱۸۳۸۶
۳۶۵۴۱	۰۳۰۳۶	۲۳۸۷۲	۰۸۴۶۴	۱۹۱۸۷	۵۸۴۴۰	۶۸۱۶۵	۳۱۸۴۲	۱۳۱۴۱	۲۱۷۱۷
۵۹۴۱۱	۷۴۳۹۰	۲۰۵۶۵	۶۷۳۴۳	۸۶۰۷۰	۱۱۸۸۷	۰۸۶۳۴	۴۷۳۹۸	۸۳۰۵۲	۱۸۴۴۶
۵۵۱۰۹	۵۰۰۳۶	۳۶۲۰۵	۶۸۸۶۹	۱۶۲۳۲	۷۰۱۶۰	۶۶۴۲۳	۵۴۳۰۹	۷۵۱۷۷	۶۶۰۲۷
۱۱۸۰۴	۰۲۱۹۶	۴۹۰۶۲	۹۲۲۳۷	۷۹۶۳۸	۷۸۹۶۷	۸۷۴۵۶	۷۳۱۵۵	۹۶۷۷۹	۵۱۴۲۰
۱۵۱۸۵	۴۹۳۱۵	۲۹۹۶۹	۸۳۵۷۸	۴۴۲۰۴	۹۶۵۰۹	۹۱۱۴۹	۱۴۱۰۳	۱۷۷۲۵	۲۷۰۴۵
۹۰۱۶۹	۱۰۸۱۴	۲۴۷۵۶	۰۲۵۹۲	۶۳۵۶۵	۶۸۸۴۳	۵۳۱۶۳	۱۷۷۷۵۲	۶۲۵۱۸	۱۳۰۹۴
۵۷۰۰۲	۰۳۱۰۷	۸۸۵۷۲	۹۳۸۹۲	۴۴۸۴۰	۶۳۸۵۲	۷۷۲۳۲	۴۹۳۲۶	۵۰۸۰۹	۱۶۲۱۵
۹۷۴۲۴	۹۰۷۶۵	۰۱۶۳۴	۳۷۳۲۸	۴۱۲۴۳	۳۳۵۶۴	۱۷۸۸۴	۹۴۷۴۷	۹۳۶۵۰	۷۷۶۶۸

جدول ب-۲: احتمال تجمعی در دنباله راست منحنی نرمال استاندارد

z	۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۷	۰/۰۸	۰/۰۹
۰	۰/۵۰۰۰	۰/۴۹۶۰	۰/۴۹۲۰	۰/۴۸۸۰	۰/۴۸۴۰	۰/۴۸۰۱	۰/۴۷۶۱	۰/۴۷۲۱	۰/۴۶۸۱	۰/۴۶۴۱
۰/۱	۰/۴۶۰۲	۰/۴۵۶۲	۰/۴۵۲۲	۰/۴۴۸۳	۰/۴۴۴۳	۰/۴۴۰۴	۰/۴۳۶۴	۰/۴۳۲۵	۰/۴۲۸۶	۰/۴۲۴۷
۰/۲	۰/۴۲۰۷	۰/۴۱۶۸	۰/۴۱۲۹	۰/۴۰۹۰	۰/۴۰۵۲	۰/۴۰۱۳	۰/۳۹۷۴	۰/۳۹۳۶	۰/۳۸۹۷	۰/۳۸۵۹
۰/۳	۰/۳۸۲۱	۰/۳۷۸۳	۰/۳۷۴۵	۰/۳۷۰۷	۰/۳۶۶۹	۰/۳۶۳۲	۰/۳۵۹۴	۰/۳۵۵۷	۰/۳۵۲۰	۰/۳۴۸۳
۰/۴	۰/۳۴۴۶	۰/۳۴۰۹	۰/۳۳۷۲	۰/۳۳۳۶	۰/۳۳۰۰	۰/۳۲۶۴	۰/۳۲۲۸	۰/۳۱۹۲	۰/۳۱۵۶	۰/۳۱۲۱
۰/۵	۰/۳۰۸۵	۰/۳۰۵۰	۰/۳۰۱۵	۰/۲۹۸۱	۰/۲۹۴۶	۰/۲۹۱۲	۰/۲۸۷۷	۰/۲۸۴۳	۰/۲۸۱۰	۰/۲۷۷۶
۰/۶	۰/۲۷۴۳	۰/۲۷۰۹	۰/۲۶۷۶	۰/۲۶۴۳	۰/۲۶۱۱	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵۴۶	۰/۲۵۱۴	۰/۲۴۸۳	۰/۲۴۵۱
۰/۷	۰/۲۴۲۰	۰/۲۳۸۹	۰/۲۳۵۸	۰/۲۳۲۷	۰/۲۲۹۶	۰/۲۲۶۶	۰/۲۲۳۶	۰/۲۲۰۶	۰/۲۱۷۷	۰/۲۱۴۸
۰/۸	۰/۲۱۱۹	۰/۲۰۹۰	۰/۲۰۶۱	۰/۲۰۳۳	۰/۲۰۰۵	۰/۱۹۷۷	۰/۱۹۴۹	۰/۱۹۲۲	۰/۱۸۹۴	۰/۱۸۶۷
۰/۹	۰/۱۸۴۱	۰/۱۸۱۴	۰/۱۷۸۸	۰/۱۷۶۲	۰/۱۷۳۶	۰/۱۷۱۱	۰/۱۶۸۵	۰/۱۶۶۰	۰/۱۶۳۵	۰/۱۶۱۱
۱	۰/۱۵۸۷	۰/۱۵۶۲	۰/۱۵۳۹	۰/۱۵۱۵	۰/۱۴۹۲	۰/۱۴۶۹	۰/۱۴۴۶	۰/۱۴۲۳	۰/۱۴۰۱	۰/۱۳۷۹
۱/۱	۰/۱۳۵۷	۰/۱۳۳۵	۰/۱۳۱۴	۰/۱۲۹۲	۰/۱۲۷۱	۰/۱۲۵۱	۰/۱۲۳۰	۰/۱۲۱۰	۰/۱۱۹۰	۰/۱۱۷۰
۱/۲	۰/۱۱۵۱	۰/۱۱۳۱	۰/۱۱۱۲	۰/۱۰۹۳	۰/۱۰۷۵	۰/۱۰۵۶	۰/۱۰۳۸	۰/۱۰۲۰	۰/۱۰۰۳	۰/۰۹۸۵
۱/۳	۰/۰۹۶۸	۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۳۴	۰/۰۹۱۸	۰/۰۹۰۱	۰/۰۸۸۵	۰/۰۸۶۹	۰/۰۸۵۳	۰/۰۸۳۸	۰/۰۸۲۳
۱/۴	۰/۰۸۰۸	۰/۰۷۹۳	۰/۰۷۷۸	۰/۰۷۶۴	۰/۰۷۴۹	۰/۰۷۳۵	۰/۰۷۲۱	۰/۰۷۰۸	۰/۰۶۹۴	۰/۰۶۸۱
۱/۵	۰/۰۶۶۸	۰/۰۶۵۵	۰/۰۶۴۳	۰/۰۶۳۰	۰/۰۶۱۸	۰/۰۶۰۶	۰/۰۵۹۴	۰/۰۵۸۲	۰/۰۵۷۱	۰/۰۵۵۹
۱/۶	۰/۰۵۴۸	۰/۰۵۳۷	۰/۰۵۲۶	۰/۰۵۱۶	۰/۰۵۰۵	۰/۰۴۹۵	۰/۰۴۸۵	۰/۰۴۷۵	۰/۰۴۶۵	۰/۰۴۵۵
۱/۷	۰/۰۴۴۶	۰/۰۴۳۶	۰/۰۴۲۷	۰/۰۴۱۸	۰/۰۴۰۹	۰/۰۴۰۱	۰/۰۳۹۲	۰/۰۳۸۴	۰/۰۳۷۵	۰/۰۳۶۷
۱/۸	۰/۰۳۵۹	۰/۰۳۵۱	۰/۰۳۴۴	۰/۰۳۳۶	۰/۰۳۲۹	۰/۰۳۲۲	۰/۰۳۱۴	۰/۰۳۰۷	۰/۰۳۰۱	۰/۰۲۹۴
۱/۹	۰/۰۲۸۷	۰/۰۲۸۱	۰/۰۲۷۴	۰/۰۲۶۸	۰/۰۲۶۲	۰/۰۲۵۶	۰/۰۲۵۰	۰/۰۲۴۴	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۳۳
۲	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۱۷	۰/۰۲۱۲	۰/۰۲۰۷	۰/۰۲۰۲	۰/۰۱۹۷	۰/۰۱۹۲	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۳
۲/۱	۰/۰۱۷۹	۰/۰۱۷۴	۰/۰۱۷۰	۰/۰۱۶۶	۰/۰۱۶۲	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۴	۰/۰۱۵۰	۰/۰۱۴۶	۰/۰۱۴۳
۲/۲	۰/۰۱۳۹	۰/۰۱۳۶	۰/۰۱۳۲	۰/۰۱۲۹	۰/۰۱۲۵	۰/۰۱۲۲	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۱۶	۰/۰۱۱۳	۰/۰۱۱۰
۲/۳	۰/۰۱۰۷	۰/۰۱۰۴	۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۸۴
۲/۴	۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۷۵	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۶۴
۲/۵	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۴۸
۲/۶	۰/۰۰۴۷	۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۳۶
۲/۷	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۲۶
۲/۸	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۱۹
۲/۹	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۴
۳	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰

جدول ب-۳: مقادیر t برای سطوح داده شده در سمت راست منحنی.

df	$t_{۰/۱}$	$t_{۰/۰۵}$	$t_{۰/۰۲۵}$	$t_{۰/۰۱}$	$t_{۰/۰۰۵}$	$t_{۰/۰۰۱}$	$t_{۰/۰۰۰۵}$
۱	۳/۰۷۸	۶/۳۱۴	۱۲/۷۰۶	۳۱/۸۲۱	۶۳/۶۵۷	۳۱۸/۳	۶۳۶/۶
۲	۱/۸۸۶	۲/۹۲۰	۴/۳۰۳	۶/۹۶۵	۹/۹۲۵	۲۲/۳۳	۳۱/۶۰
۳	۱/۶۳۸	۲/۳۵۳	۳/۱۸۲	۴/۵۴۱	۵/۸۴۱	۱۰/۲۱	۱۲/۹۲
۴	۱/۵۳۳	۲/۱۳۲	۲/۷۷۶	۳/۷۴۷	۴/۶۰۴	۷/۱۷۳	۸/۶۱۰
۵	۱/۴۷۶	۲/۰۱۵	۲/۵۷۱	۳/۳۶۵	۴/۰۳۲	۵/۸۹۴	۶/۸۶۹
۶	۱/۴۴۰	۱/۹۴۳	۲/۴۴۷	۳/۱۴۳	۳/۷۰۷	۵/۲۰۸	۵/۹۵۹
۷	۱/۴۱۵	۱/۸۹۵	۲/۳۶۵	۲/۹۹۸	۳/۴۹۹	۴/۷۸۵	۵/۴۰۸
۸	۱/۳۹۷	۱/۸۶۰	۲/۳۰۶	۲/۸۹۶	۳/۳۵۵	۴/۵۰۱	۵/۰۴۱
۹	۱/۳۸۳	۱/۸۳۳	۲/۲۶۲	۲/۸۲۱	۳/۲۵۰	۴/۲۹۷	۴/۷۸۱
۱۰	۱/۳۷۲	۱/۸۱۲	۲/۲۲۸	۲/۷۶۴	۳/۱۶۹	۴/۱۴۴	۴/۵۸۷
۱۱	۱/۳۶۳	۱/۷۹۶	۲/۲۰۱	۲/۷۱۸	۳/۱۰۶	۴/۰۲۵	۴/۴۳۷
۱۲	۱/۳۵۶	۱/۷۸۲	۲/۱۷۹	۲/۶۸۱	۳/۰۵۵	۳/۹۳۰	۴/۳۱۸
۱۳	۱/۳۵۰	۱/۷۷۱	۲/۱۶۰	۲/۶۵۰	۳/۰۱۲	۳/۸۵۲	۴/۲۲۱
۱۴	۱/۳۴۵	۱/۷۶۱	۲/۱۴۵	۲/۶۲۴	۲/۹۷۷	۳/۷۸۷	۴/۱۴۰
۱۵	۱/۳۴۱	۱/۷۵۳	۲/۱۳۱	۲/۶۰۲	۲/۹۴۷	۳/۷۳۳	۴/۰۷۳
۱۶	۱/۳۳۷	۱/۷۴۶	۲/۱۲۰	۲/۵۸۳	۲/۹۲۱	۳/۶۸۶	۴/۰۱۵
۱۷	۱/۳۳۳	۱/۷۴۰	۲/۱۱۰	۲/۵۶۷	۲/۸۹۸	۳/۶۴۶	۳/۹۶۵
۱۸	۱/۳۳۰	۱/۷۳۴	۲/۱۰۱	۲/۵۵۲	۲/۸۷۸	۳/۶۱۰	۳/۹۲۲
۱۹	۱/۳۲۸	۱/۷۲۹	۲/۰۹۳	۲/۵۳۹	۲/۸۶۱	۳/۵۷۹	۳/۸۸۳
۲۰	۱/۳۲۵	۱/۷۲۵	۲/۰۸۶	۲/۵۲۸	۲/۸۴۵	۳/۵۵۲	۳/۸۵۰
۲۱	۱/۳۲۳	۱/۷۲۱	۲/۰۸۰	۲/۵۱۸	۲/۸۳۱	۳/۵۲۷	۳/۸۱۹
۲۲	۱/۳۲۱	۱/۷۱۷	۲/۰۷۴	۲/۵۰۸	۲/۸۱۹	۳/۵۰۵	۳/۷۹۲
۲۳	۱/۳۱۹	۱/۷۱۴	۲/۰۶۹	۲/۵۰۰	۲/۸۰۷	۳/۴۸۵	۳/۷۶۸
۲۴	۱/۳۱۸	۱/۷۱۱	۲/۰۶۴	۲/۴۹۲	۲/۷۹۷	۳/۴۶۷	۳/۷۴۵
۲۵	۱/۳۱۶	۱/۷۰۸	۲/۰۶۰	۲/۴۸۵	۲/۷۸۷	۳/۴۵۰	۳/۷۲۵
۲۶	۱/۳۱۵	۱/۷۰۶	۲/۰۵۶	۲/۴۷۹	۲/۷۷۹	۳/۴۳۵	۳/۷۰۷
۲۷	۱/۳۱۴	۱/۷۰۳	۲/۰۵۲	۲/۴۷۳	۲/۷۷۱	۳/۴۲۱	۳/۶۸۹
۲۸	۱/۳۱۳	۱/۷۰۱	۲/۰۴۸	۲/۴۶۷	۲/۷۶۳	۳/۴۰۸	۳/۶۷۴
۲۹	۱/۳۱۱	۱/۶۹۹	۲/۰۴۵	۲/۴۶۲	۲/۷۵۶	۳/۳۹۶	۳/۶۶۰
۳۰	۱/۳۱۰	۱/۶۹۷	۲/۰۴۲	۲/۴۵۷	۲/۷۵۰	۳/۳۸۵	۳/۴۴۶
۳۵	۱/۳۰۶	۱/۶۹۰	۲/۰۳۰	۲/۴۳۸	۲/۷۲۴	۳/۳۴۰	۳/۵۹۱
۴۰	۱/۳۰۳	۱/۶۸۴	۲/۰۲۱	۲/۴۲۳	۲/۷۰۴	۳/۳۰۷	۳/۵۵۱
۵۰	۱/۲۹۹	۱/۶۷۶	۲/۰۰۹	۲/۴۰۳	۲/۶۷۸	۳/۲۶۱	۳/۴۹۶
۶۰	۱/۲۹۶	۱/۶۷۱	۲/۰۰۰	۲/۳۹	۲/۶۶۰	۳/۲۳۲	۳/۴۶۰
۸۰	۱/۲۹۲	۱/۶۶۴	۱/۹۹۰	۲/۳۷۴	۲/۶۳۹	۳/۱۹۵	۳/۴۱۶
۱۰۰	۱/۲۹۰	۱/۶۶	۱/۹۸۴	۲/۳۶۴	۲/۶۲۶	۳/۱۷۴	۳/۳۹۰
∞	۱/۲۸۲	۱/۶۴۶	۱/۹۶۲	۲/۳۳	۲/۵۸۱	۳/۰۹۰	۳/۲۹۱

جدول ب-۴: توزیع کای‌دو

df	۰/۹۹۵	۰/۹۹	۰/۹۷۵	۰/۹۵	۰/۹	۰/۱	۰/۰۵	۰/۲۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵
۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۶	۲/۷۰۶	۳/۸۴۱	۱/۳۲۳	۶/۶۳۵	۷/۸۷۹
۲	۰/۰۱۰	۰/۰۲۰	۰/۰۵۱	۰/۱۰۳	۰/۲۱۱	۴/۶۰۵	۵/۹۹۱	۲/۷۷۳	۹/۲۱۰	۱۰/۵۹۷
۳	۰/۰۷۲	۰/۱۱۵	۰/۲۱۶	۰/۳۵۲	۰/۵۸۴	۶/۲۵۱	۷/۸۱۵	۴/۱۰۸	۱۱/۳۴۵	۱۲/۸۳۸
۴	۰/۲۰۷	۰/۲۹۷	۰/۴۸۴	۰/۷۱۱	۱/۰۶۴	۷/۷۷۹	۹/۴۸۸	۵/۳۸۵	۱۳/۲۷۷	۱۴/۸۶۰
۵	۰/۴۱۲	۰/۵۵۴	۰/۸۳۱	۱/۱۴۵	۱/۶۱۰	۹/۲۳۶	۱۱/۰۷۰	۶/۶۲۶	۱۵/۰۸۶	۱۶/۷۵۰
۶	۰/۶۷۶	۰/۸۷۲	۱/۲۳۷	۱/۶۳۵	۲/۲۰۴	۱۰/۶۴۵	۱۲/۵۹۲	۷/۸۴۱	۱۶/۸۱۲	۱۸/۵۴۸
۷	۰/۹۸۹	۱/۲۳۹	۱/۶۹۰	۲/۱۶۷	۲/۸۳۳	۱۲/۰۱۷	۱۴/۰۶۷	۹/۰۳۷	۱۸/۴۷۵	۲۰/۲۷۸
۸	۱/۳۴۴	۱/۶۴۶	۲/۱۸۰	۲/۷۳۳	۳/۴۹۰	۱۳/۳۶۲	۱۵/۵۰۷	۱۰/۲۱۹	۲۰/۰۹۰	۲۱/۹۵۵
۹	۱/۷۳۵	۲/۰۸۸	۲/۷۰۰	۳/۳۲۵	۴/۱۶۸	۱۴/۶۸۴	۱۶/۹۱۹	۱۱/۳۸۹	۲۱/۶۶۶	۲۳/۵۸۹
۱۰	۲/۱۵۶	۲/۵۵۸	۳/۲۴۷	۳/۹۴۰	۴/۸۶۵	۱۵/۹۸۷	۱۸/۳۰۷	۱۲/۵۴۹	۲۳/۲۰۹	۲۵/۱۸۸
۱۱	۲/۶۰۳	۳/۰۵۳	۳/۸۱۶	۴/۵۷۵	۵/۵۷۸	۱۷/۲۷۵	۱۹/۶۷۵	۱۳/۷۰۱	۲۴/۷۲۵	۲۶/۷۵۷
۱۲	۳/۰۷۴	۳/۵۷۱	۴/۴۰۴	۵/۲۲۶	۶/۳۰۴	۱۸/۵۴۹	۲۱/۰۲۶	۱۴/۸۴۵	۲۶/۲۱۷	۲۸/۳۰۰
۱۳	۳/۵۶۵	۴/۱۰۷	۵/۰۰۹	۵/۸۹۲	۷/۰۴۲	۱۹/۸۱۲	۲۲/۳۶۲	۱۵/۹۸۴	۲۷/۶۸۸	۲۹/۸۱۹
۱۴	۴/۰۷۵	۴/۶۶۰	۵/۶۲۹	۶/۵۷۱	۷/۷۹۰	۲۱/۰۶۴	۲۳/۶۸۵	۱۷/۱۱۷	۲۹/۱۴۱	۳۱/۳۱۹
۱۵	۴/۶۰۱	۵/۲۲۹	۶/۲۶۲	۷/۲۶۱	۸/۵۴۷	۲۲/۳۰۷	۲۴/۹۹۶	۱۸/۲۴۵	۳۰/۵۷۸	۳۲/۸۰۱
۱۶	۵/۱۴۲	۵/۸۱۲	۶/۹۰۸	۷/۹۶۲	۹/۳۱۲	۲۳/۵۴۲	۲۶/۲۹۶	۱۹/۳۶۹	۳۲/۰۰۰	۳۴/۲۶۷
۱۷	۵/۶۹۷	۶/۴۰۸	۷/۵۶۴	۸/۶۷۲	۱۰/۰۸۵	۲۴/۷۶۹	۲۷/۵۸۷	۲۰/۴۸۹	۳۳/۴۰۹	۳۵/۷۱۸
۱۸	۶/۲۶۵	۷/۰۱۵	۸/۲۳۱	۹/۳۹۰	۱۰/۸۶۵	۲۵/۹۸۹	۲۸/۸۶۹	۲۱/۶۰۵	۳۴/۸۰۵	۳۷/۱۵۶
۱۹	۶/۸۴۴	۷/۶۳۳	۸/۹۰۷	۱۰/۱۱۷	۱۱/۶۵۱	۲۷/۲۰۴	۳۰/۱۴۴	۲۲/۷۱۸	۳۶/۱۹۱	۳۸/۵۸۲
۲۰	۷/۴۳۴	۸/۲۶۰	۹/۵۹۱	۱۰/۸۵۱	۱۲/۴۴۳	۲۸/۴۱۲	۳۱/۴۱۰	۲۳/۸۲۸	۳۷/۵۶۶	۳۹/۹۹۷
۲۱	۸/۰۳۴	۸/۸۹۷	۱۰/۲۸۳	۱۱/۵۹۱	۱۳/۲۴۰	۲۹/۶۱۵	۳۲/۶۷۱	۲۴/۹۳۵	۳۸/۹۳۲	۴۱/۴۰۱
۲۲	۸/۶۴۳	۹/۵۴۲	۱۰/۹۸۲	۱۲/۳۳۸	۱۴/۰۴۱	۳۰/۸۱۳	۳۳/۹۲۴	۲۶/۰۳۹	۴۰/۲۸۹	۴۲/۷۹۶
۲۳	۹/۲۶۰	۱۰/۱۹۶	۱۱/۶۸۹	۱۳/۰۹۱	۱۴/۸۴۸	۳۲/۰۰۷	۳۵/۱۷۲	۲۷/۱۴۱	۴۱/۶۳۸	۴۴/۱۸۱
۲۴	۹/۸۸۶	۱۰/۸۵۶	۱۲/۴۰۱	۱۳/۸۴۸	۱۵/۶۵۹	۳۳/۱۹۶	۳۶/۴۱۵	۲۸/۲۴۱	۴۲/۹۸۰	۴۵/۵۵۹
۲۵	۱۰/۵۲۰	۱۱/۵۲۴	۱۳/۱۲۰	۱۴/۶۱۱	۱۶/۴۷۳	۳۴/۳۸۲	۳۷/۶۵۲	۲۹/۳۳۹	۴۴/۳۱۴	۴۶/۹۲۸
۲۶	۱۱/۱۶۰	۱۲/۱۹۸	۱۳/۸۴۴	۱۵/۳۷۹	۱۷/۲۹۲	۳۵/۵۶۳	۳۸/۸۸۵	۳۰/۴۳۵	۴۵/۶۴۲	۴۸/۲۹۰
۲۷	۱۱/۸۰۸	۱۲/۸۷۹	۱۴/۵۷۳	۱۶/۱۵۱	۱۸/۱۱۴	۳۶/۷۴۱	۴۰/۱۱۳	۳۱/۵۲۸	۴۶/۹۶۳	۴۹/۶۴۵
۲۸	۱۲/۴۶۱	۱۳/۵۶۵	۱۵/۳۰۸	۱۶/۹۲۸	۱۸/۹۳۹	۳۷/۹۱۶	۴۱/۳۳۷	۳۲/۶۲۰	۴۸/۲۷۸	۵۰/۹۹۳
۲۹	۱۳/۱۲۱	۱۴/۲۵۶	۱۶/۰۴۷	۱۷/۷۰۸	۱۹/۷۶۸	۳۹/۰۸۷	۴۲/۵۵۷	۳۳/۷۱۱	۴۹/۵۸۸	۵۲/۳۳۶
۳۰	۱۳/۷۸۷	۱۴/۹۵۳	۱۶/۷۹۱	۱۸/۴۹۳	۲۰/۵۹۹	۴۰/۲۵۶	۴۳/۷۷۳	۳۴/۸۰۰	۵۰/۸۹۲	۵۳/۶۷۲
۳۱	۱۴/۴۵۸	۱۵/۶۵۵	۱۷/۵۳۹	۱۹/۲۸۱	۲۱/۴۳۴	۴۱/۴۲۲	۴۴/۹۸۵	۳۵/۸۸۷	۵۲/۱۹۱	۵۵/۰۰۳
۳۲	۱۵/۱۳۴	۱۶/۳۶۲	۱۸/۲۹۱	۲۰/۰۷۲	۲۲/۲۷۱	۴۲/۵۸۵	۴۶/۱۹۴	۳۶/۹۷۳	۵۳/۴۸۶	۵۶/۳۲۸
۳۳	۱۵/۸۱۵	۱۷/۰۷۴	۱۹/۰۴۷	۲۰/۸۶۷	۲۳/۱۱۰	۴۳/۷۴۵	۴۷/۴۰۰	۳۸/۰۵۸	۵۴/۷۷۶	۵۷/۶۴۸
۳۴	۱۶/۵۰۱	۱۷/۷۸۹	۱۹/۸۰۶	۲۱/۶۶۴	۲۳/۹۵۲	۴۴/۹۰۳	۴۸/۶۰۲	۳۹/۱۴۱	۵۶/۰۶۱	۵۸/۹۶۴
۳۵	۱۷/۱۹۲	۱۸/۵۰۹	۲۰/۵۶۹	۲۲/۴۶۵	۲۴/۷۹۷	۴۶/۰۵۹	۴۹/۸۰۲	۴۰/۲۲۳	۵۷/۳۴۲	۶۰/۲۷۵
۳۶	۱۷/۸۸۷	۱۹/۲۳۳	۲۱/۳۳۶	۲۳/۲۶۹	۲۵/۶۴۳	۴۷/۲۱۲	۵۰/۹۹۸	۴۱/۳۰۴	۵۸/۶۱۹	۶۱/۵۸۱
۳۷	۱۸/۵۸۶	۱۹/۹۶۰	۲۲/۱۰۶	۲۴/۰۷۵	۲۶/۴۹۲	۴۸/۳۶۳	۵۲/۱۹۲	۴۲/۳۸۳	۵۹/۸۹۳	۶۲/۸۸۳
۳۸	۱۹/۲۸۹	۲۰/۶۹۱	۲۲/۸۷۸	۲۴/۸۸۴	۲۷/۳۴۳	۴۹/۵۱۳	۵۳/۳۸۴	۴۳/۴۶۲	۶۱/۱۶۲	۶۴/۱۸۱
۳۹	۱۹/۹۹۶	۲۱/۴۲۶	۲۳/۶۵۴	۲۵/۶۹۵	۲۸/۱۹۶	۵۰/۶۶۰	۵۴/۵۷۲	۴۴/۵۳۹	۶۲/۴۲۸	۶۵/۴۷۶
۴۰	۲۰/۷۰۷	۲۲/۱۶۴	۲۴/۴۳۳	۲۶/۵۰۹	۲۹/۰۵۱	۵۱/۸۰۵	۵۵/۷۵۸	۴۵/۶۱۶	۶۳/۶۹۱	۶۶/۷۶۶
۴۱	۲۱/۴۲۱	۲۲/۹۰۶	۲۵/۲۱۵	۲۷/۳۲۶	۲۹/۹۰۷	۵۲/۹۴۹	۵۶/۹۴۲	۴۶/۶۹۲	۶۴/۹۵۰	۶۸/۰۵۳
۴۲	۲۲/۱۳۸	۲۳/۶۵۰	۲۵/۹۹۹	۲۸/۱۴۴	۳۰/۷۶۵	۵۴/۰۹۰	۵۸/۱۲۴	۴۷/۷۶۶	۶۶/۲۰۶	۶۹/۳۳۶
۴۳	۲۲/۸۵۹	۲۴/۳۹۸	۲۶/۷۸۵	۲۸/۹۶۵	۳۱/۶۲۵	۵۵/۲۳۰	۵۹/۳۰۴	۴۸/۸۴۰	۶۷/۴۵۹	۷۰/۶۱۶
۴۴	۲۳/۵۸۴	۲۵/۱۴۸	۲۷/۵۷۵	۲۹/۷۸۷	۳۲/۴۸۷	۵۶/۳۶۹	۶۰/۴۸۱	۴۹/۹۱۳	۶۸/۷۱۰	۷۱/۸۹۳
۴۵	۲۴/۳۱۱	۲۵/۹۰۱	۲۸/۳۶۶	۳۰/۶۱۲	۳۳/۳۵۰	۵۷/۵۰۵	۶۱/۶۵۶	۵۰/۹۸۵	۶۹/۹۵۷	۷۳/۱۶۶
۴۶	۲۵/۰۴۱	۲۶/۶۵۷	۲۹/۱۶۰	۳۱/۴۳۹	۳۴/۲۱۵	۵۸/۶۴۱	۶۲/۸۳۰	۵۲/۰۵۶	۷۱/۲۰۱	۷۴/۴۳۷
۴۷	۲۵/۷۷۵	۲۷/۴۱۶	۲۹/۹۵۶	۳۲/۲۶۸	۳۵/۰۸۱	۵۹/۷۷۴	۶۴/۰۰۱	۵۳/۱۲۷	۷۲/۴۴۳	۷۵/۷۰۴

جدول ب-۵: جدول F برای سطح $\alpha = ۰/۱$

	$df_۱ =$ ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۲	۱۵	۲۰	۲۴	۳۰	۴۰	۶۰	۱۲۰	∞
$df_۲ =$ ۱	۳۹/۹	۴۹/۵	۵۳/۶	۵۵/۸	۵۷/۲	۵۸/۲	۵۸/۹	۵۹/۴	۵۹/۸	۶۰/۲	۶۰/۷	۶۱/۲	۶۱/۷	۶۲/۰۰	۶۲/۳	۶۲/۵	۶۲/۸	۶۳/۱	۶۳/۳
۲	۸/۵۳	۹/۰۰	۹/۱۶	۹/۲۴	۹/۲۹	۹/۳۳	۹/۳۵	۹/۳۷	۹/۳۸	۹/۳۹	۹/۴۱	۹/۴۲	۹/۴۴	۹/۴۵	۹/۴۶	۹/۴۷	۹/۴۷	۹/۴۸	۹/۴۹
۳	۵/۵۴	۵/۴۶	۵/۳۹	۵/۳۴	۵/۳۱	۵/۲۸	۵/۲۷	۵/۲۵	۵/۲۴	۵/۲۳	۵/۲۲	۵/۲۰	۵/۱۸	۵/۱۸	۵/۱۷	۵/۱۶	۵/۱۵	۵/۱۴	۵/۱۳
۴	۴/۵۴	۴/۳۲	۴/۱۹	۴/۱۱	۴/۰۵	۴/۰۱	۳/۹۸	۳/۹۵	۳/۹۴	۳/۹۲	۳/۹۰	۳/۸۷	۳/۸۴	۳/۸۳	۳/۸۲	۳/۸۰	۳/۷۹	۳/۷۸	۳/۷۶
۵	۴/۰۶	۳/۷۸	۳/۶۲	۳/۵۲	۳/۴۵	۳/۴۰	۳/۳۷	۳/۳۴	۳/۳۲	۳/۳۰	۳/۲۷	۳/۲۴	۳/۲۱	۳/۱۹	۳/۱۷	۳/۱۶	۳/۱۴	۳/۱۲	۳/۱۱
۶	۳/۷۸	۳/۴۶	۳/۲۹	۳/۱۸	۳/۱۱	۳/۰۵	۳/۰۱	۲/۹۸	۲/۹۶	۲/۹۴	۲/۹۰	۲/۸۷	۲/۸۴	۲/۸۲	۲/۸۰	۲/۷۸	۲/۷۶	۲/۷۴	۲/۷۲
۷	۳/۵۹	۳/۲۶	۳/۰۷	۲/۹۶	۲/۸۸	۲/۸۳	۲/۷۸	۲/۷۵	۲/۷۲	۲/۷۰	۲/۶۷	۲/۶۳	۲/۵۹	۲/۵۸	۲/۵۶	۲/۵۴	۲/۵۱	۲/۴۹	۲/۴۷
۸	۳/۴۶	۳/۱۱	۲/۹۲	۲/۸۱	۲/۷۳	۲/۶۷	۲/۶۲	۲/۵۹	۲/۵۶	۲/۵۴	۲/۵۰	۲/۴۶	۲/۴۲	۲/۴۰	۲/۳۸	۲/۳۶	۲/۳۴	۲/۳۲	۲/۲۹
۹	۳/۳۶	۳/۰۱	۲/۸۱	۲/۶۹	۲/۶۱	۲/۵۵	۲/۵۱	۲/۴۷	۲/۴۴	۲/۴۲	۲/۳۸	۲/۳۴	۲/۳۰	۲/۲۸	۲/۲۵	۲/۲۳	۲/۲۱	۲/۱۸	۲/۱۶
۱۰	۳/۲۹	۲/۹۲	۲/۷۳	۲/۶۱	۲/۵۲	۲/۴۶	۲/۴۱	۲/۳۸	۲/۳۵	۲/۳۲	۲/۲۸	۲/۲۴	۲/۲۰	۲/۱۸	۲/۱۶	۲/۱۳	۲/۱۱	۲/۰۸	۲/۰۶
۱۱	۳/۲۳	۲/۸۶	۲/۶۶	۲/۵۴	۲/۴۵	۲/۳۹	۲/۳۴	۲/۳۰	۲/۲۷	۲/۲۵	۲/۲۱	۲/۱۷	۲/۱۲	۲/۱۰	۲/۰۸	۲/۰۵	۲/۰۳	۲/۰۰	۱/۹۷
۱۲	۳/۱۸	۲/۸۱	۲/۶۱	۲/۴۸	۲/۳۹	۲/۳۳	۲/۲۸	۲/۲۴	۲/۲۱	۲/۱۹	۲/۱۵	۲/۱۰	۲/۰۶	۲/۰۴	۲/۰۱	۱/۹۹	۱/۹۶	۱/۹۳	۱/۹۰
۱۳	۳/۱۴	۲/۷۶	۲/۵۶	۲/۴۳	۲/۳۵	۲/۲۸	۲/۲۳	۲/۲۰	۲/۱۶	۲/۱۴	۲/۱۰	۲/۰۵	۲/۰۱	۱/۹۸	۱/۹۶	۱/۹۳	۱/۹۰	۱/۸۸	۱/۸۵
۱۴	۳/۱۰	۲/۷۳	۲/۵۲	۲/۳۹	۲/۳۱	۲/۲۴	۲/۱۹	۲/۱۵	۲/۱۲	۲/۱۰	۲/۰۵	۲/۰۱	۱/۹۶	۱/۹۴	۱/۹۱	۱/۸۹	۱/۸۶	۱/۸۳	۱/۸۰
۱۵	۳/۰۷	۲/۷۰	۲/۴۹	۲/۳۶	۲/۲۷	۲/۲۱	۲/۱۶	۲/۱۲	۲/۰۹	۲/۰۶	۲/۰۲	۱/۹۷	۱/۹۲	۱/۹۰	۱/۸۷	۱/۸۵	۱/۸۲	۱/۷۹	۱/۷۶
۱۶	۳/۰۵	۲/۶۷	۲/۴۶	۲/۳۳	۲/۲۴	۲/۱۸	۲/۱۳	۲/۰۹	۲/۰۶	۲/۰۳	۱/۹۹	۱/۹۴	۱/۸۹	۱/۸۷	۱/۸۴	۱/۸۱	۱/۷۸	۱/۷۵	۱/۷۲
۱۷	۳/۰۳	۲/۶۴	۲/۴۴	۲/۳۱	۲/۲۲	۲/۱۵	۲/۱۰	۲/۰۶	۲/۰۳	۲/۰۰	۱/۹۶	۱/۹۱	۱/۸۶	۱/۸۴	۱/۸۱	۱/۷۸	۱/۷۵	۱/۷۲	۱/۶۹
۱۸	۳/۰۱	۲/۶۲	۲/۴۲	۲/۲۹	۲/۲۰	۲/۱۳	۲/۰۸	۲/۰۴	۲/۰۰	۱/۹۸	۱/۹۳	۱/۸۹	۱/۸۴	۱/۸۱	۱/۷۸	۱/۷۵	۱/۷۲	۱/۶۹	۱/۶۶
۱۹	۲/۹۹	۲/۶۱	۲/۴۰	۲/۲۷	۲/۱۸	۲/۱۱	۲/۰۶	۲/۰۲	۱/۹۸	۱/۹۶	۱/۹۱	۱/۸۶	۱/۸۱	۱/۷۹	۱/۷۶	۱/۷۳	۱/۷۰	۱/۶۷	۱/۶۳
۲۰	۲/۹۷	۲/۵۹	۲/۳۸	۲/۲۵	۲/۱۶	۲/۰۹	۲/۰۴	۲/۰۰	۱/۹۶	۱/۹۴	۱/۸۹	۱/۸۴	۱/۷۹	۱/۷۷	۱/۷۴	۱/۷۱	۱/۶۸	۱/۶۴	۱/۶۱
۲۱	۲/۹۶	۲/۵۷	۲/۳۶	۲/۲۳	۲/۱۴	۲/۰۸	۲/۰۲	۱/۹۸	۱/۹۵	۱/۹۲	۱/۸۷	۱/۸۳	۱/۷۸	۱/۷۵	۱/۷۲	۱/۶۹	۱/۶۶	۱/۶۲	۱/۵۹
۲۲	۲/۹۵	۲/۵۶	۲/۳۵	۲/۲۲	۲/۱۳	۲/۰۶	۲/۰۱	۱/۹۷	۱/۹۳	۱/۹۰	۱/۸۶	۱/۸۱	۱/۷۶	۱/۷۳	۱/۷۰	۱/۶۷	۱/۶۴	۱/۶۰	۱/۵۷
۲۳	۲/۹۴	۲/۵۵	۲/۳۴	۲/۲۱	۲/۱۱	۲/۰۵	۱/۹۹	۱/۹۵	۱/۹۲	۱/۸۹	۱/۸۴	۱/۸۰	۱/۷۴	۱/۷۲	۱/۶۹	۱/۶۶	۱/۶۲	۱/۵۹	۱/۵۵
۲۴	۲/۹۳	۲/۵۴	۲/۳۳	۲/۱۹	۲/۱۰	۲/۰۴	۱/۹۸	۱/۹۴	۱/۹۱	۱/۸۸	۱/۸۳	۱/۷۸	۱/۷۳	۱/۷۰	۱/۶۷	۱/۶۴	۱/۶۱	۱/۵۷	۱/۵۳
۲۵	۲/۹۲	۲/۵۳	۲/۳۲	۲/۱۸	۲/۰۹	۲/۰۲	۱/۹۷	۱/۹۳	۱/۸۹	۱/۸۷	۱/۸۲	۱/۷۷	۱/۷۲	۱/۶۹	۱/۶۶	۱/۶۳	۱/۵۹	۱/۵۶	۱/۵۲
۲۶	۲/۹۱	۲/۵۲	۲/۳۱	۲/۱۷	۲/۰۸	۲/۰۱	۱/۹۶	۱/۹۲	۱/۸۸	۱/۸۶	۱/۸۱	۱/۷۶	۱/۷۱	۱/۶۸	۱/۶۵	۱/۶۱	۱/۵۸	۱/۵۴	۱/۵۰
۲۷	۲/۹۰	۲/۵۱	۲/۳۰	۲/۱۷	۲/۰۷	۲/۰۰	۱/۹۵	۱/۹۱	۱/۸۷	۱/۸۵	۱/۸۰	۱/۷۵	۱/۷۰	۱/۶۷	۱/۶۴	۱/۶۰	۱/۵۷	۱/۵۳	۱/۴۹
۲۸	۲/۸۹	۲/۵۰	۲/۲۹	۲/۱۶	۲/۰۶	۲/۰۰	۱/۹۴	۱/۹۰	۱/۸۷	۱/۸۴	۱/۷۹	۱/۷۴	۱/۶۹	۱/۶۶	۱/۶۳	۱/۵۹	۱/۵۶	۱/۵۲	۱/۴۸
۲۹	۲/۸۹	۲/۵۰	۲/۲۸	۲/۱۵	۲/۰۶	۱/۹۹	۱/۹۳	۱/۸۹	۱/۸۶	۱/۸۳	۱/۷۸	۱/۷۳	۱/۶۸	۱/۶۵	۱/۶۲	۱/۵۸	۱/۵۵	۱/۵۱	۱/۴۷
۳۰	۲/۸۸	۲/۴۹	۲/۲۸	۲/۱۴	۲/۰۵	۱/۹۸	۱/۹۳	۱/۸۸	۱/۸۵	۱/۸۲	۱/۷۷	۱/۷۲	۱/۶۷	۱/۶۴	۱/۶۱	۱/۵۷	۱/۵۴	۱/۵۰	۱/۴۶
۴۰	۲/۸۴	۲/۴۴	۲/۲۳	۲/۰۹	۲/۰۰	۱/۹۳	۱/۸۷	۱/۸۳	۱/۷۹	۱/۷۶	۱/۷۱	۱/۶۶	۱/۶۱	۱/۵۷	۱/۵۴	۱/۵۱	۱/۴۷	۱/۴۲	۱/۳۸
۶۰	۲/۷۹	۲/۳۹	۲/۱۸	۲/۰۴	۱/۹۵	۱/۸۷	۱/۸۲	۱/۷۷	۱/۷۴	۱/۷۱	۱/۶۶	۱/۶۰	۱/۵۴	۱/۵۱	۱/۴۸	۱/۴۴	۱/۴۰	۱/۳۵	۱/۲۹

جدول ب-۶: جدول F برای سطح $\alpha = ۰٫۰۵$

	$df_1 = ۱$	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۲	۱۵	۲۰	۲۴	۳۰	۴۰	۶۰	۱۲۰	∞
$df_2 = ۱$	۱۶۱	۱۹۹	۲۱۵	۲۲۴	۲۳۰	۲۳۴	۲۳۶	۲۳۸	۲۴۰	۲۴۱	۲۴	۲۴۵	۲۴۸	۲۴۹	۲۵۰	۲۵۱	۲۵۲	۲۵۳	۲۵۴
۲	۱۸٫۵۱	۱۹٫۰۰	۱۹٫۱۶	۱۹٫۲۵	۱۹٫۳۰	۱۹٫۳۳	۱۹٫۳۵	۱۹٫۳۷	۱۹٫۴	۱۹٫۴	۱۹٫۴	۱۹٫۴	۱۹٫۴	۱۹٫۴	۱۹٫۵	۱۹٫۵	۱۹٫۵	۱۹٫۵	۱۹٫۵
۳	۱۰٫۱۳	۹٫۵۵	۹٫۲۸	۹٫۱۲	۹٫۰۱	۸٫۹۴	۸٫۸۹	۸٫۸۵	۸٫۸۱	۸٫۷۹	۸٫۷۴	۸٫۷۰	۸٫۶۶	۸٫۶۴	۸٫۶۲	۸٫۵۹	۸٫۵۷	۸٫۵۵	۸٫۵۳
۴	۷٫۷۱	۶٫۹۴	۶٫۵۹	۶٫۳۹	۶٫۲۶	۶٫۱۶	۶٫۰۹	۶٫۰۴	۶٫۰۰	۵٫۹۶	۵٫۹۱	۵٫۸۶	۵٫۸۰	۵٫۷۷	۵٫۷۵	۵٫۷۲	۵٫۶۹	۵٫۶۶	۵٫۶۳
۵	۶٫۶۱	۵٫۷۹	۵٫۴۱	۵٫۱۹	۵٫۰۵	۴٫۹۵	۴٫۸۸	۴٫۸۲	۴٫۷۷	۴٫۷۴	۴٫۶۸	۴٫۶۲	۴٫۵۶	۴٫۵۳	۴٫۵۰	۴٫۴۶	۴٫۴۳	۴٫۴۰	۴٫۳۷
۶	۵٫۹۹	۵٫۱۴	۴٫۷۶	۴٫۵۳	۴٫۳۹	۴٫۲۸	۴٫۲۱	۴٫۱۵	۴٫۱۰	۴٫۰۶	۴٫۰۰	۳٫۹۴	۳٫۸۷	۳٫۸۴	۳٫۸۱	۳٫۷۷	۳٫۷۴	۳٫۷۰	۳٫۶۷
۷	۵٫۵۹	۴٫۷۴	۴٫۳۵	۴٫۱۲	۳٫۹۷	۳٫۸۷	۳٫۷۹	۳٫۷۳	۳٫۶۸	۳٫۶۴	۳٫۵۷	۳٫۵۱	۳٫۴۴	۳٫۴۱	۳٫۳۸	۳٫۳۴	۳٫۳۰	۳٫۲۷	۳٫۲۳
۸	۵٫۳۲	۴٫۴۶	۴٫۰۷	۳٫۸۴	۳٫۶۹	۳٫۵۸	۳٫۵۰	۳٫۴۴	۳٫۳۹	۳٫۳۵	۳٫۲۸	۳٫۲۲	۳٫۱۵	۳٫۱۲	۳٫۰۸	۳٫۰۴	۳٫۰۱	۲٫۹۷	۲٫۹۳
۹	۵٫۱۲	۴٫۲۶	۳٫۸۶	۳٫۶۳	۳٫۴۸	۳٫۳۷	۳٫۲۹	۳٫۲۳	۳٫۱۸	۳٫۱۴	۳٫۰۷	۳٫۰۱	۲٫۹۴	۲٫۹۰	۲٫۸۶	۲٫۸۳	۲٫۷۹	۲٫۷۵	۲٫۷۱
۱۰	۴٫۹۶	۴٫۱۰	۳٫۷۱	۳٫۴۸	۳٫۳۳	۳٫۲۲	۳٫۱۴	۳٫۰۷	۳٫۰۲	۲٫۹۸	۲٫۹۱	۲٫۸۵	۲٫۷۷	۲٫۷۴	۲٫۷۰	۲٫۶۶	۲٫۶۲	۲٫۵۸	۲٫۵۴
۱۱	۴٫۸۴	۳٫۹۸	۳٫۵۹	۳٫۳۶	۳٫۲۰	۳٫۰۹	۳٫۰۱	۲٫۹۵	۲٫۹۰	۲٫۸۵	۲٫۷۹	۲٫۷۲	۲٫۶۵	۲٫۶۱	۲٫۵۷	۲٫۵۳	۲٫۴۹	۲٫۴۵	۲٫۴۰
۱۲	۴٫۷۵	۳٫۸۹	۳٫۴۹	۳٫۲۶	۳٫۱۱	۳٫۰۰	۲٫۹۱	۲٫۸۵	۲٫۸۰	۲٫۷۵	۲٫۶۹	۲٫۶۲	۲٫۵۴	۲٫۵۱	۲٫۴۷	۲٫۴۳	۲٫۳۸	۲٫۳۴	۲٫۳۰
۱۳	۴٫۶۷	۳٫۸۱	۳٫۴۱	۳٫۱۸	۳٫۰۳	۲٫۹۲	۲٫۸۳	۲٫۷۷	۲٫۷۱	۲٫۶۷	۲٫۶۰	۲٫۵۳	۲٫۴۶	۲٫۴۲	۲٫۳۸	۲٫۳۴	۲٫۳۰	۲٫۲۵	۲٫۲۱
۱۴	۴٫۶۰	۳٫۷۴	۳٫۳۴	۳٫۱۱	۲٫۹۶	۲٫۸۵	۲٫۷۶	۲٫۷۰	۲٫۶۵	۲٫۶۰	۲٫۵۳	۲٫۴۶	۲٫۳۹	۲٫۳۵	۲٫۳۱	۲٫۲۷	۲٫۲۲	۲٫۱۸	۲٫۱۳
۱۵	۴٫۵۴	۳٫۶۸	۳٫۲۹	۳٫۰۶	۲٫۹۰	۲٫۷۹	۲٫۷۱	۲٫۶۴	۲٫۵۹	۲٫۵۴	۲٫۴۸	۲٫۴۰	۲٫۳۳	۲٫۲۹	۲٫۲۵	۲٫۲۰	۲٫۱۶	۲٫۱۱	۲٫۰۷
۱۶	۴٫۴۹	۳٫۶۳	۳٫۲۴	۳٫۰۱	۲٫۸۵	۲٫۷۴	۲٫۶۶	۲٫۵۹	۲٫۵۴	۲٫۴۹	۲٫۴۲	۲٫۳۵	۲٫۲۸	۲٫۲۴	۲٫۱۹	۲٫۱۵	۲٫۱۱	۲٫۰۶	۲٫۰۱
۱۷	۴٫۴۵	۳٫۵۹	۳٫۲۰	۲٫۹۶	۲٫۸۱	۲٫۷۰	۲٫۶۱	۲٫۵۵	۲٫۴۹	۲٫۴۵	۲٫۳۸	۲٫۳۱	۲٫۲۳	۲٫۱۹	۲٫۱۵	۲٫۱۰	۲٫۰۶	۲٫۰۱	۱٫۹۶
۱۸	۴٫۴۱	۳٫۵۵	۳٫۱۶	۲٫۹۳	۲٫۷۷	۲٫۶۶	۲٫۵۸	۲٫۵۱	۲٫۴۶	۲٫۴۱	۲٫۳۴	۲٫۲۷	۲٫۱۹	۲٫۱۵	۲٫۱۱	۲٫۰۶	۲٫۰۲	۱٫۹۷	۱٫۹۲
۱۹	۴٫۳۸	۳٫۵۲	۳٫۱۳	۲٫۹۰	۲٫۷۴	۲٫۶۳	۲٫۵۴	۲٫۴۸	۲٫۴۲	۲٫۳۸	۲٫۳۱	۲٫۲۳	۲٫۱۶	۲٫۱۱	۲٫۰۷	۲٫۰۳	۱٫۹۸	۱٫۹۳	۱٫۸۸
۲۰	۴٫۳۵	۳٫۴۹	۳٫۱۰	۲٫۸۷	۲٫۷۱	۲٫۶۰	۲٫۵۱	۲٫۴۵	۲٫۳۹	۲٫۳۵	۲٫۲۸	۲٫۲۰	۲٫۱۲	۲٫۰۸	۲٫۰۴	۱٫۹۹	۱٫۹۵	۱٫۹۰	۱٫۸۴
۲۱	۴٫۳۲	۳٫۴۷	۳٫۰۷	۲٫۸۴	۲٫۶۸	۲٫۵۷	۲٫۴۹	۲٫۴۲	۲٫۳۷	۲٫۳۲	۲٫۲۵	۲٫۱۸	۲٫۱۰	۲٫۰۵	۲٫۰۱	۱٫۹۶	۱٫۹۲	۱٫۸۷	۱٫۸۱
۲۲	۴٫۳۰	۳٫۴۴	۳٫۰۵	۲٫۸۲	۲٫۶۶	۲٫۵۵	۲٫۴۶	۲٫۴۰	۲٫۳۴	۲٫۳۰	۲٫۲۳	۲٫۱۵	۲٫۰۷	۲٫۰۳	۱٫۹۸	۱٫۹۴	۱٫۸۹	۱٫۸۴	۱٫۷۸
۲۳	۴٫۲۸	۳٫۴۲	۳٫۰۳	۲٫۸۰	۲٫۶۴	۲٫۵۳	۲٫۴۴	۲٫۳۷	۲٫۳۲	۲٫۲۷	۲٫۲۰	۲٫۱۳	۲٫۰۵	۲٫۰۱	۱٫۹۶	۱٫۹۱	۱٫۸۶	۱٫۸۱	۱٫۷۶
۲۴	۴٫۲۶	۳٫۴۰	۳٫۰۱	۲٫۷۸	۲٫۶۲	۲٫۵۱	۲٫۴۲	۲٫۳۶	۲٫۳۰	۲٫۲۵	۲٫۱۸	۲٫۱۱	۲٫۰۳	۱٫۹۸	۱٫۹۴	۱٫۸۹	۱٫۸۴	۱٫۷۹	۱٫۷۳
۲۵	۴٫۲۴	۳٫۳۹	۲٫۹۹	۲٫۷۶	۲٫۶۰	۲٫۴۹	۲٫۴۰	۲٫۳۴	۲٫۲۸	۲٫۲۴	۲٫۱۶	۲٫۰۹	۲٫۰۱	۱٫۹۶	۱٫۹۲	۱٫۸۷	۱٫۸۲	۱٫۷۷	۱٫۷۱
۲۶	۴٫۲۳	۳٫۳۷	۲٫۹۸	۲٫۷۴	۲٫۵۹	۲٫۴۷	۲٫۳۹	۲٫۳۲	۲٫۲۷	۲٫۲۲	۲٫۱۵	۲٫۰۷	۱٫۹۹	۱٫۹۵	۱٫۹۰	۱٫۸۵	۱٫۸۰	۱٫۷۵	۱٫۶۹
۲۷	۴٫۲۱	۳٫۳۵	۲٫۹۶	۲٫۷۳	۲٫۵۷	۲٫۴۶	۲٫۳۷	۲٫۳۱	۲٫۲۵	۲٫۲۰	۲٫۱۳	۲٫۰۶	۱٫۹۷	۱٫۹۳	۱٫۸۸	۱٫۸۴	۱٫۷۹	۱٫۷۳	۱٫۶۷
۲۸	۴٫۲۰	۳٫۳۴	۲٫۹۵	۲٫۷۱	۲٫۵۶	۲٫۴۵	۲٫۳۶	۲٫۲۹	۲٫۲۴	۲٫۱۹	۲٫۱۲	۲٫۰۴	۱٫۹۶	۱٫۹۱	۱٫۸۷	۱٫۸۲	۱٫۷۷	۱٫۷۱	۱٫۶۵
۲۹	۴٫۱۸	۳٫۳۳	۲٫۹۳	۲٫۷۰	۲٫۵۵	۲٫۴۳	۲٫۳۵	۲٫۲۸	۲٫۲۲	۲٫۱۸	۲٫۱۰	۲٫۰۳	۱٫۹۴	۱٫۹۰	۱٫۸۵	۱٫۸۱	۱٫۷۵	۱٫۷۰	۱٫۶۴
۳۰	۴٫۱۷	۳٫۳۲	۲٫۹۲	۲٫۶۹	۲٫۵۳	۲٫۴۲	۲٫۳۳	۲٫۲۷	۲٫۲۱	۲٫۱۶	۲٫۰۹	۲٫۰۱	۱٫۹۳	۱٫۸۹	۱٫۸۴	۱٫۷۹	۱٫۷۴	۱٫۶۸	۱٫۶۲
۴۰	۴٫۰۸	۳٫۲۳	۲٫۸۴	۲٫۶۱	۲٫۴۵	۲٫۳۴	۲٫۲۵	۲٫۱۸	۲٫۱۲	۲٫۰۸	۲٫۰۰	۱٫۹۲	۱٫۸۴	۱٫۷۹	۱٫۷۴	۱٫۶۹	۱٫۶۴	۱٫۵۸	۱٫۵۱
۶۰	۴٫۰۰	۳٫۱۵	۲٫۷۶	۲٫۵۳	۲٫۳۷	۲٫۲۵	۲٫۱۷	۲٫۱۰	۲٫۰۴	۱٫۹۹	۱٫۹۲	۱٫۸۴	۱٫۷۵	۱٫۷۰	۱٫۶۵	۱٫۵۹	۱٫۵۳	۱٫۴۷	۱٫۳۹

جدول ب-۷: جدول F برای سطح $\alpha = ۰/۰۲۵$

	$df_1 = ۱$	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۲	۱۵	۲۰	۲۴	۳۰	۴۰	۶۰	۱۲۰	∞
$df_2 = ۱$	۶۴۸	۸۰۰	۸۶۴	۹۰۰	۹۲۲	۹۳۷	۹۴۸	۹۵۷	۹۶۳	۹۶۹	۹۷۷	۹۸۵	۹۹۳	۹۹۷	۱۰۰۱	۱۰۰۶	۱۰۱۰	۱۰۱۴	۱۰۱۸
۲	۳۸/۵۱	۳۹/۰۰	۳۹/۱۷	۳۹/۲۵	۳۹/۳۰	۳۹/۳۳	۳۹/۳۶	۳۹/۳۷	۳۹/۳۹	۳۹/۴۰	۳۹/۴۱	۳۹/۴۳	۳۹/۴۵	۳۹/۴۶	۳۹/۴۷	۳۹/۴۷	۳۹/۴۸	۳۹/۴۹	۳۹/۵۰
۳	۱۷/۴۴	۱۶/۰۴	۱۵/۴۴	۱۵/۱۰	۱۴/۸۸	۱۴/۷۳	۱۴/۶۲	۱۴/۵۴	۱۴/۴۷	۱۴/۴۲	۱۴/۳۴	۱۴/۲۵	۱۴/۱۷	۱۴/۱۲	۱۴/۰۸	۱۴/۰۴	۱۳/۹۹	۱۳/۹۵	۱۳/۹۰
۴	۱۲/۲۲	۱۰/۶۵	۹/۹۸	۹/۶۰	۹/۳۶	۹/۲۰	۹/۰۷	۸/۹۸	۸/۹۰	۸/۸۴	۸/۷۵	۸/۶۶	۸/۵۶	۸/۵۱	۸/۴۶	۸/۴۱	۸/۳۶	۸/۳۱	۸/۲۶
۵	۱۰/۰۱	۸/۴۳	۷/۷۶	۷/۳۹	۷/۱۵	۶/۹۸	۶/۸۵	۶/۷۶	۶/۶۸	۶/۶۲	۶/۵۲	۶/۴۳	۶/۳۳	۶/۲۸	۶/۲۳	۶/۱۸	۶/۱۲	۶/۰۷	۶/۰۲
۶	۸/۸۱	۷/۲۶	۶/۶۰	۶/۲۳	۵/۹۹	۵/۸۲	۵/۷۰	۵/۶۰	۵/۵۲	۵/۴۶	۵/۳۷	۵/۲۷	۵/۱۷	۵/۱۲	۵/۰۷	۵/۰۱	۴/۹۶	۴/۹۰	۴/۸۵
۷	۸/۰۷	۶/۵۴	۵/۸۹	۵/۵۲	۵/۲۹	۵/۱۲	۴/۹۹	۴/۹۰	۴/۸۲	۴/۷۶	۴/۶۷	۴/۵۷	۴/۴۷	۴/۴۲	۴/۳۶	۴/۳۱	۴/۲۵	۴/۲۰	۴/۱۴
۸	۷/۵۷	۶/۰۶	۵/۴۲	۵/۰۵	۴/۸۲	۴/۶۵	۴/۵۳	۴/۴۳	۴/۳۶	۴/۳۰	۴/۲۰	۴/۱۰	۴/۰۰	۳/۹۵	۳/۸۹	۳/۸۴	۳/۷۸	۳/۷۳	۳/۶۷
۹	۷/۲۱	۵/۷۱	۵/۰۸	۴/۷۲	۴/۴۸	۴/۳۲	۴/۲۰	۴/۱۰	۴/۰۳	۳/۹۶	۳/۸۷	۳/۷۷	۳/۶۷	۳/۶۱	۳/۵۶	۳/۵۱	۳/۴۵	۳/۳۹	۳/۳۳
۱۰	۶/۹۴	۵/۴۶	۴/۸۳	۴/۴۷	۴/۲۴	۴/۰۷	۳/۹۵	۳/۸۵	۳/۷۸	۳/۷۲	۳/۶۲	۳/۵۲	۳/۴۲	۳/۳۷	۳/۳۱	۳/۲۶	۳/۲۰	۳/۱۴	۳/۰۸
۱۱	۶/۷۲	۵/۲۶	۴/۶۳	۴/۲۸	۴/۰۴	۳/۸۸	۳/۷۶	۳/۶۶	۳/۵۹	۳/۵۳	۳/۴۳	۳/۳۳	۳/۲۳	۳/۱۷	۳/۱۲	۳/۰۶	۳/۰۰	۲/۹۴	۲/۸۸
۱۲	۶/۵۵	۵/۱۰	۴/۴۷	۴/۱۲	۳/۸۹	۳/۷۳	۳/۶۱	۳/۵۱	۳/۴۴	۳/۳۷	۳/۲۸	۳/۱۸	۳/۰۷	۳/۰۲	۲/۹۶	۲/۹۱	۲/۸۵	۲/۷۹	۲/۷۳
۱۳	۶/۴۱	۴/۹۷	۴/۳۵	۴/۰۰	۳/۷۷	۳/۶۰	۳/۴۸	۳/۳۹	۳/۳۱	۳/۲۵	۳/۱۵	۳/۰۵	۲/۹۵	۲/۸۹	۲/۸۴	۲/۷۸	۲/۷۲	۲/۶۶	۲/۶۰
۱۴	۶/۳۰	۴/۸۶	۴/۲۴	۳/۸۹	۳/۶۶	۳/۵۰	۳/۳۸	۳/۲۹	۳/۲۱	۳/۱۵	۳/۰۵	۲/۹۵	۲/۸۴	۲/۷۹	۲/۷۳	۲/۶۷	۲/۶۱	۲/۵۵	۲/۴۹
۱۵	۶/۲۰	۴/۷۷	۴/۱۵	۳/۸۰	۳/۵۸	۳/۴۱	۳/۲۹	۳/۲۰	۳/۱۲	۳/۰۶	۲/۹۶	۲/۸۶	۲/۷۶	۲/۷۰	۲/۶۴	۲/۵۹	۲/۵۲	۲/۴۶	۲/۴۰
۱۶	۶/۱۲	۴/۶۹	۴/۰۸	۳/۷۳	۳/۵۰	۳/۳۴	۳/۲۲	۳/۱۲	۳/۰۵	۲/۹۹	۲/۸۹	۲/۷۹	۲/۶۸	۲/۶۳	۲/۵۷	۲/۵۱	۲/۴۵	۲/۳۸	۲/۳۲
۱۷	۶/۰۴	۴/۶۲	۴/۰۱	۳/۶۶	۳/۴۴	۳/۲۸	۳/۱۶	۳/۰۶	۲/۹۸	۲/۹۲	۲/۸۲	۲/۷۲	۲/۶۲	۲/۵۶	۲/۵۰	۲/۴۴	۲/۳۸	۲/۳۲	۲/۲۵
۱۸	۵/۹۸	۴/۵۶	۳/۹۵	۳/۶۱	۳/۳۸	۳/۲۲	۳/۱۰	۳/۰۱	۲/۹۳	۲/۸۷	۲/۷۷	۲/۶۷	۲/۵۶	۲/۵۰	۲/۴۵	۲/۳۸	۲/۳۲	۲/۲۶	۲/۱۹
۱۹	۵/۹۲	۴/۵۱	۳/۹۰	۳/۵۶	۳/۳۳	۳/۱۷	۳/۰۵	۲/۹۶	۲/۸۸	۲/۸۲	۲/۷۲	۲/۶۲	۲/۵۱	۲/۴۵	۲/۳۹	۲/۳۳	۲/۲۷	۲/۲۰	۲/۱۳
۲۰	۵/۸۷	۴/۴۶	۳/۸۶	۳/۵۱	۳/۲۹	۳/۱۳	۳/۰۱	۲/۹۱	۲/۸۴	۲/۷۷	۲/۶۸	۲/۵۷	۲/۴۶	۲/۴۱	۲/۳۵	۲/۲۹	۲/۲۲	۲/۱۶	۲/۰۹
۲۱	۵/۸۳	۴/۴۲	۳/۸۲	۳/۴۸	۳/۲۵	۳/۰۹	۲/۹۷	۲/۸۷	۲/۸۰	۲/۷۳	۲/۶۴	۲/۵۳	۲/۴۲	۲/۳۷	۲/۳۱	۲/۲۵	۲/۱۸	۲/۱۱	۲/۰۴
۲۲	۵/۷۹	۴/۳۸	۳/۷۸	۳/۴۴	۳/۲۲	۳/۰۵	۲/۹۳	۲/۸۴	۲/۷۶	۲/۷۰	۲/۶۰	۲/۵۰	۲/۳۹	۲/۳۳	۲/۲۷	۲/۲۱	۲/۱۵	۲/۰۸	۲/۰۰
۲۳	۵/۷۵	۴/۳۵	۳/۷۵	۳/۴۱	۳/۱۸	۳/۰۲	۲/۹۰	۲/۸۱	۲/۷۳	۲/۶۷	۲/۵۷	۲/۴۷	۲/۳۶	۲/۳۰	۲/۲۴	۲/۱۸	۲/۱۱	۲/۰۴	۱/۹۷
۲۴	۵/۷۲	۴/۳۲	۳/۷۲	۳/۳۸	۳/۱۵	۲/۹۹	۲/۸۷	۲/۷۸	۲/۷۰	۲/۶۴	۲/۵۴	۲/۴۴	۲/۳۳	۲/۲۷	۲/۲۱	۲/۱۵	۲/۰۸	۲/۰۱	۱/۹۴
۲۵	۵/۶۹	۴/۲۹	۳/۶۹	۳/۳۵	۳/۱۳	۲/۹۷	۲/۸۵	۲/۷۵	۲/۶۸	۲/۶۱	۲/۵۱	۲/۴۱	۲/۳۰	۲/۲۴	۲/۱۸	۲/۱۲	۲/۰۵	۱/۹۸	۱/۹۱
۲۶	۵/۶۶	۴/۲۷	۳/۶۷	۳/۳۳	۳/۱۰	۲/۹۴	۲/۸۲	۲/۷۳	۲/۶۵	۲/۵۹	۲/۴۹	۲/۳۹	۲/۲۸	۲/۲۲	۲/۱۶	۲/۰۹	۲/۰۳	۱/۹۵	۱/۸۸
۲۷	۵/۶۳	۴/۲۴	۳/۶۵	۳/۳۱	۳/۰۸	۲/۹۲	۲/۸۰	۲/۷۱	۲/۶۳	۲/۵۷	۲/۴۷	۲/۳۶	۲/۲۵	۲/۱۹	۲/۱۳	۲/۰۷	۲/۰۰	۱/۹۳	۱/۸۵
۲۸	۵/۶۱	۴/۲۲	۳/۶۳	۳/۲۹	۳/۰۶	۲/۹۰	۲/۷۸	۲/۶۹	۲/۶۱	۲/۵۵	۲/۴۵	۲/۳۴	۲/۲۳	۲/۱۷	۲/۱۱	۲/۰۵	۱/۹۸	۱/۹۱	۱/۸۳
۲۹	۵/۵۹	۴/۲۰	۳/۶۱	۳/۲۷	۳/۰۴	۲/۸۸	۲/۷۶	۲/۶۷	۲/۵۹	۲/۵۳	۲/۴۳	۲/۳۲	۲/۲۱	۲/۱۵	۲/۰۹	۲/۰۳	۱/۹۶	۱/۸۹	۱/۸۱
۳۰	۵/۵۷	۴/۱۸	۳/۵۹	۳/۲۵	۳/۰۳	۲/۸۷	۲/۷۵	۲/۶۵	۲/۵۷	۲/۵۱	۲/۴۱	۲/۳۱	۲/۲۰	۲/۱۴	۲/۰۷	۲/۰۱	۱/۹۴	۱/۸۷	۱/۷۹
۴۰	۵/۴۲	۴/۰۵	۳/۴۶	۳/۱۳	۲/۹۰	۲/۷۴	۲/۶۲	۲/۵۳	۲/۴۵	۲/۳۹	۲/۲۹	۲/۱۸	۲/۰۷	۲/۰۱	۱/۹۴	۱/۸۸	۱/۸۰	۱/۷۲	۱/۶۴
۶۰	۵/۲۹	۳/۹۳	۳/۳۴	۳/۰۱	۲/۷۹	۲/۶۳	۲/۵۱	۲/۴۱	۲/۳۳	۲/۲۷	۲/۱۷	۲/۰۶	۱/۹۴	۱/۸۸	۱/۸۲	۱/۷۴	۱/۶۷	۱/۵۸	۱/۴۸

جدول ب-۸: جدول F برای سطح $\alpha = ۰/۰۱$

	df₁ = ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۲	۱۵	۲۰	۲۴	۳۰	۴۰	۶۰	۱۲۰	∞
df_۲=۱	۴۰۵۲	۵۰۰۰	۵۴۰۳	۵۶۲۵	۵۷۶۴	۵۸۵۹	۵۹۲۸	۵۹۸۱	۶۰۲۲	۶۰۵۶	۶۱۰۶	۶۱۵۷	۶۲۰۹	۶۲۳۵	۶۲۶۱	۶۲۸۷	۶۳۱۳	۶۳۳۹	۶۳۶۶
۲	۹۸/۵	۹۹/۰	۹۹/۲	۹۹/۲	۹۹/۳	۹۹/۳	۹۹/۴	۹۹/۴	۹۹/۴	۹۹/۴	۹۹/۴	۹۹/۴	۹۹/۴	۹۹/۵	۹۹/۵	۹۹/۵	۹۹/۵	۹۹/۵	۹۹/۵
۳	۳۴/۱	۳۰/۸	۲۹/۵	۲۸/۷	۲۸/۲	۲۷/۹	۲۷/۷	۲۷/۵	۲۷/۳	۲۷/۲	۲۷/۱	۲۶/۹	۲۶/۷	۲۶/۶	۲۶/۵	۲۶/۴	۲۶/۳	۲۶/۲	۲۶/۱
۴	۲۱/۲	۱۸/۰	۱۶/۷	۱۶/۰	۱۵/۵	۱۵/۲	۱۵/۰	۱۴/۸	۱۴/۷	۱۴/۵	۱۴/۴	۱۴/۲	۱۴/۰	۱۳/۹	۱۳/۸	۱۳/۷	۱۳/۷	۱۳/۶	۱۳/۵
۵	۱۶/۲۶	۱۳/۲۷	۱۲/۰۶	۱۱/۳۹	۱۰/۹۷	۱۰/۶۷	۱۰/۴۶	۱۰/۲۹	۱۰/۱۶	۱۰/۰۵	۹/۸۹	۹/۷۲	۹/۵۵	۹/۴۷	۹/۳۸	۹/۲۹	۹/۲۰	۹/۱۱	۹/۰۲
۶	۱۳/۷۵	۱۰/۹۳	۹/۷۸	۹/۱۵	۸/۷۵	۸/۴۷	۸/۲۶	۸/۱۰	۷/۹۸	۷/۸۷	۷/۷۲	۷/۵۶	۷/۴۰	۷/۳۱	۷/۲۳	۷/۱۴	۷/۰۶	۶/۹۷	۶/۸۸
۷	۱۲/۲۵	۹/۵۵	۸/۴۵	۷/۸۵	۷/۴۶	۷/۱۹	۶/۹۹	۶/۸۴	۶/۷۲	۶/۶۲	۶/۴۷	۶/۳۱	۶/۱۶	۶/۰۷	۵/۹۹	۵/۹۱	۵/۸۲	۵/۷۴	۵/۶۵
۸	۱۱/۲۶	۸/۶۵	۷/۵۹	۷/۰۱	۶/۶۳	۶/۳۷	۶/۱۸	۶/۰۳	۵/۹۱	۵/۸۱	۵/۶۷	۵/۵۲	۵/۳۶	۵/۲۸	۵/۲۰	۵/۱۲	۵/۰۳	۴/۹۵	۴/۸۶
۹	۱۰/۵۶	۸/۰۲	۶/۹۹	۶/۴۲	۶/۰۶	۵/۸۰	۵/۶۱	۵/۴۷	۵/۳۵	۵/۲۶	۵/۱۱	۴/۹۶	۴/۸۱	۴/۷۳	۴/۶۵	۴/۵۷	۴/۴۸	۴/۴۰	۴/۳۱
۱۰	۱۰/۰۴	۷/۵۶	۶/۵۵	۵/۹۹	۵/۶۴	۵/۳۹	۵/۲۰	۵/۰۶	۴/۹۴	۴/۸۵	۴/۷۱	۴/۵۶	۴/۴۱	۴/۳۳	۴/۲۵	۴/۱۷	۴/۰۸	۴/۰۰	۳/۹۱
۱۱	۹/۶۵	۷/۲۱	۶/۲۲	۵/۶۷	۵/۳۲	۵/۰۷	۴/۸۹	۴/۷۴	۴/۶۳	۴/۵۴	۴/۴۰	۴/۲۵	۴/۱۰	۴/۰۲	۳/۹۴	۳/۸۶	۳/۷۸	۳/۶۹	۳/۶۰
۱۲	۹/۳۳	۶/۹۳	۵/۹۵	۵/۴۱	۵/۰۶	۴/۸۲	۴/۶۴	۴/۵۰	۴/۳۹	۴/۳۰	۴/۱۶	۴/۰۱	۳/۸۶	۳/۷۸	۳/۷۰	۳/۶۲	۳/۵۴	۳/۴۵	۳/۳۶
۱۳	۹/۰۷	۶/۷۰	۵/۷۴	۵/۲۱	۴/۸۶	۴/۶۲	۴/۴۴	۴/۳۰	۴/۱۹	۴/۱۰	۳/۹۶	۳/۸۲	۳/۶۷	۳/۵۹	۳/۵۱	۳/۴۳	۳/۳۴	۳/۲۶	۳/۱۷
۱۴	۸/۸۶	۶/۵۲	۵/۵۶	۵/۰۴	۴/۷۰	۴/۴۶	۴/۲۸	۴/۱۴	۴/۰۳	۳/۹۴	۳/۸۰	۳/۶۶	۳/۵۱	۳/۴۳	۳/۳۵	۳/۲۷	۳/۱۸	۳/۰۹	۳/۰۰
۱۵	۸/۶۸	۶/۳۶	۵/۴۲	۴/۸۹	۴/۵۶	۴/۳۲	۴/۱۴	۴/۰۰	۳/۹۰	۳/۸۱	۳/۶۷	۳/۵۲	۳/۳۷	۳/۲۹	۳/۲۱	۳/۱۳	۳/۰۵	۲/۹۶	۲/۸۷
۱۶	۸/۵۳	۶/۲۳	۵/۲۹	۴/۷۷	۴/۴۴	۴/۲۰	۴/۰۳	۳/۸۹	۳/۷۸	۳/۶۹	۳/۵۵	۳/۴۱	۳/۲۶	۳/۱۸	۳/۱۰	۳/۰۲	۲/۹۳	۲/۸۵	۲/۷۵
۱۷	۸/۴۰	۶/۱۱	۵/۱۹	۴/۶۷	۴/۳۴	۴/۱۰	۳/۹۳	۳/۷۹	۳/۶۸	۳/۵۹	۳/۴۶	۳/۳۱	۳/۱۶	۳/۰۸	۳/۰۰	۲/۹۲	۲/۸۴	۲/۷۵	۲/۶۵
۱۸	۸/۲۹	۶/۰۱	۵/۰۹	۴/۵۸	۴/۲۵	۴/۰۲	۳/۸۴	۳/۷۱	۳/۶۰	۳/۵۱	۳/۳۷	۳/۲۳	۳/۰۸	۳/۰۰	۲/۹۲	۲/۸۴	۲/۷۵	۲/۶۶	۲/۵۷
۱۹	۸/۱۹	۵/۹۳	۵/۰۱	۴/۵۰	۴/۱۷	۳/۹۴	۳/۷۷	۳/۶۳	۳/۵۲	۳/۴۳	۳/۳۰	۳/۱۵	۳/۰۰	۲/۹۳	۲/۸۴	۲/۷۶	۲/۶۷	۲/۵۸	۲/۴۹
۲۰	۸/۱۰	۵/۸۵	۴/۹۴	۴/۴۳	۴/۱۰	۳/۸۷	۳/۷۰	۳/۵۶	۳/۴۶	۳/۳۷	۳/۲۳	۳/۰۹	۲/۹۴	۲/۸۶	۲/۷۸	۲/۷۰	۲/۶۱	۲/۵۲	۲/۴۲
۲۱	۸/۰۲	۵/۷۸	۴/۸۷	۴/۳۷	۴/۰۴	۳/۸۱	۳/۶۴	۳/۵۱	۳/۴۰	۳/۳۱	۳/۱۷	۳/۰۳	۲/۸۸	۲/۸۰	۲/۷۲	۲/۶۴	۲/۵۵	۲/۴۶	۲/۳۶
۲۲	۷/۹۵	۵/۷۲	۴/۸۲	۴/۳۱	۳/۹۹	۳/۷۶	۳/۵۹	۳/۴۵	۳/۳۵	۳/۲۶	۳/۱۲	۲/۹۸	۲/۸۳	۲/۷۵	۲/۶۷	۲/۵۸	۲/۵۰	۲/۴۰	۲/۳۱
۲۳	۷/۸۸	۵/۶۶	۴/۷۷	۴/۲۶	۳/۹۴	۳/۷۱	۳/۵۴	۳/۴۱	۳/۳۰	۳/۲۱	۳/۰۷	۲/۹۳	۲/۷۸	۲/۷۰	۲/۶۲	۲/۵۴	۲/۴۵	۲/۳۵	۲/۲۶
۲۴	۷/۸۲	۵/۶۱	۴/۷۲	۴/۲۲	۳/۹۰	۳/۶۷	۳/۵۰	۳/۳۶	۳/۲۶	۳/۱۷	۳/۰۳	۲/۸۹	۲/۷۴	۲/۶۶	۲/۵۸	۲/۴۹	۲/۴۰	۲/۳۱	۲/۲۱
۲۵	۷/۷۷	۵/۵۷	۴/۶۸	۴/۱۸	۳/۸۶	۳/۶۳	۳/۴۶	۳/۳۲	۳/۲۲	۳/۱۳	۲/۹۹	۲/۸۵	۲/۷۰	۲/۶۲	۲/۵۴	۲/۴۵	۲/۳۶	۲/۲۷	۲/۱۷
۲۶	۷/۷۲	۵/۵۳	۴/۶۴	۴/۱۴	۳/۸۲	۳/۵۹	۳/۴۲	۳/۲۹	۳/۱۸	۳/۰۹	۲/۹۶	۲/۸۲	۲/۶۶	۲/۵۹	۲/۵۰	۲/۴۲	۲/۳۳	۲/۲۳	۲/۱۳
۲۷	۷/۶۸	۵/۴۹	۴/۶۰	۴/۱۱	۳/۷۹	۳/۵۶	۳/۳۹	۳/۲۶	۳/۱۵	۳/۰۶	۲/۹۳	۲/۷۸	۲/۶۳	۲/۵۵	۲/۴۷	۲/۳۸	۲/۲۹	۲/۲۰	۲/۱۰
۲۸	۷/۶۴	۵/۴۵	۴/۵۷	۴/۰۷	۳/۷۵	۳/۵۳	۳/۳۶	۳/۲۳	۳/۱۲	۳/۰۳	۲/۹۰	۲/۷۵	۲/۶۰	۲/۵۲	۲/۴۴	۲/۳۵	۲/۲۶	۲/۱۷	۲/۰۶
۲۹	۷/۶۰	۵/۴۲	۴/۵۴	۴/۰۵	۳/۷۳	۳/۵۰	۳/۳۳	۳/۲۰	۳/۰۹	۳/۰۱	۲/۸۷	۲/۷۳	۲/۵۷	۲/۵۰	۲/۴۱	۲/۳۳	۲/۲۳	۲/۱۴	۲/۰۳
۳۰	۷/۵۶	۵/۳۹	۴/۵۱	۴/۰۲	۳/۷۰	۳/۴۷	۳/۳۰	۳/۱۷	۳/۰۷	۲/۹۸	۲/۸۴	۲/۷۰	۲/۵۵	۲/۴۷	۲/۳۹	۲/۳۰	۲/۲۱	۲/۱۱	۲/۰۱
۴۰	۷/۳۱	۵/۱۸	۴/۳۱	۳/۸۳	۳/۵۱	۳/۲۹	۳/۱۲	۲/۹۹	۲/۸۹	۲/۸۰	۲/۶۷	۲/۵۲	۲/۳۷	۲/۲۹	۲/۲۰	۲/۱۱	۲/۰۲	۱/۹۲	۱/۸۱
۶۰	۷/۰۸	۴/۹۸	۴/۱۳	۳/۶۵	۳/۳۴	۳/۱۲	۲/۹۵	۲/۸۲	۲/۷۲	۲/۶۳	۲/۵۰	۲/۳۵	۲/۲۰	۲/۱۲	۲/۰۳	۱/۹۴	۱/۸۴	۱/۷۳	۱/۶۰